目　录

第一章 基 础

§1 实 数

最基本的数是自然数

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

我们将自然数的全体所构成的集记作

$$\boldsymbol{N}.$$

(为方便起见，我们必须引进集的概念。一个集是由一群个体所构成的。比如说 100 是一个自然数，我们说 100 是集 $\boldsymbol{N}$ 中的一个元素，写作

$$100 \in \boldsymbol{N},$$

读作

“100 属于 $\boldsymbol{N}$”，

或“100 包含在 $\boldsymbol{N}$ 中（为一个元素）”，

或“$\boldsymbol{N}$ 包含 100（为一个元素）”.

另一方面，1/2 不是一个自然数，我们说 1/2 不是集 $\boldsymbol{N}$ 中的一

个元素，写作

$$1/2 \notin N,$$

读作

"1/2 不属于 N"，

或"1/2 不包含在 N 中（为一个元素）"，

或"N 不包含 1/2（为一个元素）"。

在附录中我们介绍这本书中所用到的直观集论，供读者参考.）

N 具有下列三条性质.

N1. 1 是一个自然数，即

$$1 \in N.$$

N2. 紧接着任何一个自然数 k 之后，有一个唯一的自然数 $k+1$（因之 $1+1=2$，$2+1=3$，$3+1=4$，…）. 于是，若 $k \in N$，则 $k+1 \in N$. 用符号来表示这句话，我们写成

$$k \in N \Longrightarrow k+1 \in N.$$

（一般来说，对任何两个陈述 P 与 Q，

$$P \Longrightarrow Q$$

表示"若 P 成立，则 Q 亦成立". 如果 $P \Longrightarrow Q$，而且 $Q \Longrightarrow P$，我们写成

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

这表示"P 成立的一个**充要条件**是 Q 成立".）

N3. 假设 N' 是 N 的一个子集.（已给两个集 A 与 A'. 若对任何 x，$x \in A' \Longrightarrow x \in A$，我们称 A' 为 A 的一个**子集**，写成

$$A' \subset A,$$

读成

"A' 包含在 A 中（为一个子集）"，

或"A 包含 A'（为一个子集）"。

若对任何 x，$x \in A' \Longleftrightarrow x \in A$，我们说 A' 与 A 是**相同的**，写成

$$A'=A,$$

读成

$$\text{“}A'\text{等于}A\text{”}.$$

所以

$$A'=A \Longleftrightarrow A'\subset A,\ A\subset A'.)$$

若 N' 具有下列两条性质：

(i) $1\in N'$,

(ii) $k\in N' \Longrightarrow k+1\in N'$,

则 $N'=N$. 换句话来说，若 $N'\neq N$，则 N' 不可能同时具有 (i) 与 (ii) 两条性质.

在 N 中有一个**加法**，具有下列三条性质.

A1. 对任何两个 a，$b\in N$，有一个唯一的

$$a+b\in N.$$

我们称 $a+b$ 为 a 与 b 的**和**. 再者，紧接在 a 之后的自然数 $a+1$（见 $N2$）是 a 与 1 的和.

A2. 对任何 a，b，$c\in N$，

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

A3. 对任何 a，$b\in N$，

$$a+b=b+a.$$

在 N 中还有一个**乘法**，具有下列五条性质.

M1. 对任何两个 a，$b\in N$，有一个唯一的

$$a\cdot b\in N.$$

我们称 $a\cdot b$ 为 a 与 b 的**积**. $a\cdot b$ 亦写作

$$ab \quad \text{（去掉}a\text{与}b\text{之间的点）}.$$

M2. 对任何 $a\in N$，

$$a1=a=1a.$$

M3. 对任何 a，b，$c\in N$，

$$(ab)c = a(bc).$$

M4. 对任何 a，$b \in N$，

$$ab = ba.$$

M5. 对任何 a，b，$c \in N$，

$$a(b+c) = ab + ac,$$

$$(b+c)a = ba + ca.$$

N 是有序的.（我们说一个集 A 是有序的，就是说 A 满足下面两个条件：

O1. 对任何 a，$b \in A$，

$a < b$（读"a 小于 b"），

$a = b$（读"a 等于 b"），

$a > b$（读"a 大于 b"）.

这三个情形中有一个而且只有一个成立．在这里我们还要求

$$a < b \Longleftrightarrow b > a.$$

O2. 对任何 a，b，$c \in A$，

$$a < b,\ b < c \Longrightarrow a < c.$$

（假设 A 是有序的．若 a，$b \in A$ 满足 $a < b$ 或 $a = b$，我们写成

$a \leq b$（读"a 小于或等于 b"）.

若 a，$b \in A$ 满足 $a > b$ 或 $a = b$，我们写作

$a \geq b$（读"a 大于或等于 b"）.

因此对任何 a，$b \in A$，

$$a \leq b \Longleftrightarrow b \geq a.）$$

对 N 中的次序，我们还要求下列三条性质：

O3. 对任何 a，$b \in N$，

$a < b \Longleftrightarrow$ 唯一存在一个 $c \in N$ 使 $a + c = b$.

O4. 对任何 a，b，$c \in N$，

$$a<b \Longleftrightarrow a+c<b+c.$$

于是

$$a \leqq b \Longleftrightarrow a+c \leqq b+c.$$

O5. 对任何 a，b，$c \in \boldsymbol{N}$，

$$a<b \Longleftrightarrow ac<bc.$$

于是

$$a \leqq b \Longleftrightarrow ac \leqq bc.$$

在 $\boldsymbol{N}$ 中有加法和乘法，但是没有减法. 所谓减法，是希望对任何 a 与 b，唯一存在一个 $b-a$ 使 $a+(b-a)=b$. 对任何 a，$b \in \boldsymbol{N}$，$b-a$ 在 $a<b$ 时存在（见 O3）而且只在 $a<b$ 时存在. 这是 $\boldsymbol{N}$ 的缺点.

为弥补这个缺点，我们引进零和负自然数

$$0, \ -1, \ -2, \ -3, \ \cdots.$$

自然数、零及负自然数统称为整数. 我们将整数全体所构成的集记作

$$\boldsymbol{Z}.$$

在 $\boldsymbol{Z}$ 中亦有加法和乘法，是 $\boldsymbol{N}$ 中加法和乘法的扩充. 换句话来说，对任何两个 a，$b \in \boldsymbol{Z}$，我们有一个唯一的和

$$a+b \in \boldsymbol{Z}$$

和一个唯一的积

$$ab \in \boldsymbol{Z},$$

而且当 a，$b \in \boldsymbol{N}$ 时，这个和及积就是先前所说的. 再者 A2，A3，M2，M3，M4，M5 对任何 a，b，$c \in \boldsymbol{Z}$ 都成立，而且

$$\cdots, (-3)+1=-2, (-2)+1=-1,$$

$$(-1)+1=0, 0+1=1.$$

$\boldsymbol{Z}$ 亦是有序的，而且在 $\boldsymbol{Z}$ 中的次序是在 $\boldsymbol{N}$ 中的次序的扩充. 这就是说 O1 对任何 a，$b \in \boldsymbol{Z}$ 成立，而且当 a，$b \in \boldsymbol{N}$ 时，a

$<b$ 与先前所说的一样. 再者 O2, O3, O4 对任何 a, b, $c \in \mathbf{Z}$ 成立, 而且 O5 须修正, 即对任何 a, b, $c \in \mathbf{Z}$ 在 $c>0$ 时成立.

$\mathbf{Z}$ 有 $\mathbf{N}$ 的好处, 即有加法与乘法, 同时还有满足 O3, O4 及修正 O5 的次序. $\mathbf{Z}$ 之所以比 $\mathbf{N}$ 更好, 是在 $\mathbf{Z}$ 中还有减法. 就是说对任何 a, $b \in \mathbf{Z}$, 唯一存在一个

$$b-a \in \mathbf{Z},$$

使 $a+(b-a)=b$.

为减法我们将自然数集 $\mathbf{N}$ 扩大至整数集 $\mathbf{Z}$. 同样地, 为除法我们将整数集 $\mathbf{Z}$ 扩大至有理数集 $\mathbf{Q}$. 一个**有理数**可以写成

$$\frac{m}{n} \quad \text{或} \quad m/n,$$

其中 m 与 n 是整数, 而且 $n \neq 0$.

对任何两个有理数, m/n 及 m'/n',

$$m/n=m'/n' \iff mn'=nm'.$$

将有理数的全体所构成的集记作

$$\mathbf{Q}.$$

因为我们可以将每一个整数 m 看作有理数 $m/1$, 所以

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}.$$

在 $\mathbf{Q}$ 中我们有加法、乘法和减法, 是 $\mathbf{Z}$ 中的加法、乘法和减法的扩充. 若 m/n, $m'/n' \in \mathbf{Q}$, 则

$$m/n+m'/n'=(mn'+nm')/nn',$$
$$(m/n)(m'/n')=mm'/nn',$$
$$m/n-m'/n'=(mn'-nm')/nn'$$

在 $\mathbf{Q}$ 中我们还有**除法**. 若 m/n, $m'/n' \in \mathbf{Q}$, 而且 $m'/n' \neq 0$, 则 $m' \neq 0$, 而且

$$m/n' \div m'/n' = (m/n)\ /\ (m'/n')$$
$$=mn'/nm'.$$

在这里我们须注意到，在 Q 中的加法和乘法亦满足 A1——A3 和 M1——M5.

再者，在 Q 中有一个满足 O3、O4 及修正 O5 的次序，是 Z 中的次序的扩充. 对任何 m/n，$m'/n'\in Q$，我们不妨假设 n，$n'\in N$. 原因是

$$m/n=(-m)/(-n),\quad m'/n'=(-m')/(-n').$$

在这个假设下，

$$m/n<m'/n' \Longleftrightarrow mn'<nm'.$$

从代数观点上来看，在 Q 中有加减乘除，还有满足某些条件的次序，已经很完善了. 可是换在几何观点上来看，Q 有一点缺陷，即在有理数之间有很多空隙. 现在让我们说明原因在哪里，然后引进实数来弥补这缺陷.

已给一条直线 l 及 l 上两个不同点 O 和 E，则对任何一个有理数 x，我们可以决定 l 上一个点 $P(x)$. 令 $x=m/n$，其中 $m\in Z$，$n\in N$. 我们先在线段 $\overline{OE}$ 找一点 E_n，使线段 $\overline{OE}$ 的长度等于线段 $\overline{OE_n}$ 的长度的 n 倍. 换一句话来说，若 $\overline{OE}$ 的长度是 1，则 $\overline{OE_n}$ 的长度是 $1/n$. 如果 $m=0$，我们令 $P(x)=O$. 如果 $m>0$，我们令 $P=P(x)$ 为 l 上的点，使由 O 到 P 的方向与由 O 到 E 的方向相同，而且线段 $\overline{OP}$ 的长度等于线段 $\overline{OE_n}$ 的长度的 m 倍. 如果 $m<0$，我们令 $P=P(x)$ 为 l 上的点，使由 O 到 P 的方向与由 O 到 E 的方向相反，而且线段 $\overline{OP}$ 的长度等于线段 $\overline{OE_n}$ 的长度的 $-m$ 倍.

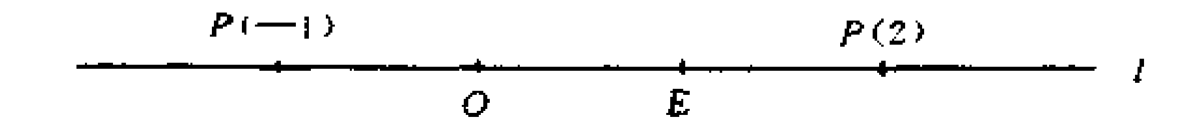


图 1.1

我们说 O 和 E 两点决定 l 上一个**坐标系**. 在这坐标系中，$P(x)$ 的 **坐标**是 x. 因为 O 的坐标是 0，E 的坐标是 1，我们称 O 为这坐标系的**原点**，称 E 为这坐标系的**单位点**.

对任何自然数 n，

$$\cdots,P(-2/n),P(-1/n),P(0/n),P(1/n),P(2/n),\cdots$$

是 l 上无穷个点，而且依循一定顺序排列. 再者，若 O 与 E 之间的距离是 1，则在这些点中两相邻点之间的距离等于 $1/n$. 在下面的图中每一点上面的有理数是那点的坐标.

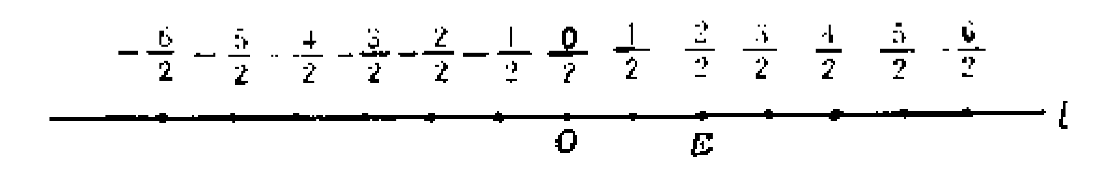


图 1.2

我们不难想象得到，以有理数为坐标的点很密集地分布在 l 上. 于是我们要问：在 l 上还有其它的点吗？这问题的答案是肯定的. 作一个直角三角形，使直角两旁的边的长度等于 1，即 $\overline{OE}$ 的长度. 则斜边的长度等于 $\sqrt{2}$，不是一个有理数. 令 P 为 l 上一个点，使由 O 到 P 的方向与由 O 到 E 的方向相同，而且 $\overline{OP}$ 的长度等于斜边的长度. 于是不存在一个有理数 x，使 $P=P(x)$. 这表示以有理数为坐标的点相互之间有空隙.

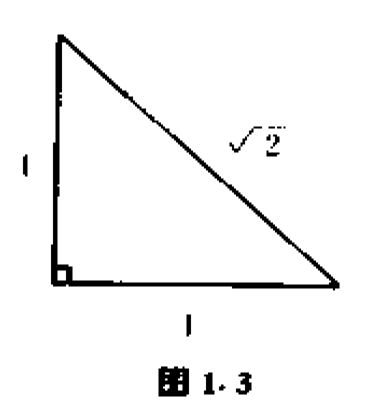


图 1.3

喜欢数学的人有一个共同点，就

是常常问"为什么?"不但要问，而且还要找一个让自己满意的答案. 在上一段中我们作一个直角三角形，使直角两旁的边的长度等于1,斜边的长度等于$\sqrt{2}$是由勾股定理得到的. 说$\sqrt{2}$不是有理数，很多读者一定要问"为什么?"在这里我们给一个理由.

若$\sqrt{2}$是一个有理数，则存在两个自然数p和q使$\sqrt{2}=p/q$. 我们不妨假定p与q之间只有一个是偶数. 不然的话，分数p/q可以简化. 因为$\sqrt{2}=p/q$，于是$p^2=2q^2$. 因此p是偶数，而且由$q^2=2(p/2)^2$知道q亦是偶数. 这与假设相矛盾. 这说明了为什么$\sqrt{2}$不是一个有理数.

在几何学中，**我们假设任何一条直线上点与点之间是没有空隙的**. 为迎合这个需要，我们引进实数.

记实数的全体所构成的集为

$$\boldsymbol{R}.$$

则实数集$\boldsymbol{R}$有下列两条性质：

I. 对l上任何一点P，唯一存在一个实数x，使P的坐标是x，即$P=P(x)$,倒过来,对任何一个实数x,唯一存在l上一点$P(x)$，它的坐标是x. 用集论中的术语来说，

$$x \longleftrightarrow P(x)$$

是实数与l上的点之间的一个一一对应.（一一对应是集论中一个基本概念，我们以后还要提到. 为进一步了解，请读者参阅附录.）

II. 在实数集中有加法，减法，乘法和除法，而且还有一个满足某些条件的次序. 不但如此，这些概念是$\boldsymbol{Q}$中对应概念的扩充.

表示一个实数，习惯上我们用十进法. 于是一个实数有一个整数部分

$$a_0$$

和一个小数部分

$$0.a_1a_2\cdots=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots,$$

其中 a_0 是一个整数，a_1，a_2，…是不小于 0 而且不大于 9 的整数. 这样的实数写成

$$a_0.a_1a_2\cdots.$$

通常我们假定不存在一个自然数 k，使

$$a_k=a_{k+1}=\cdots=9.$$

原因是若 $a_{k-1}<9$，$a_k=a_{k+1}=\cdots=9$，则

$$a_0.a_1\cdots a_{k-1}99\cdots=a_0.a_1\cdots(a_{k-1}+1).$$

现在我们来说明实数与 l 上的点之间的一一对应.

已给一个实数

$$\begin{aligned}x&=a_0.a_1a_2\cdots\\&=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots\end{aligned}$$

我们先找点 $P(a_0)$ 及 $P(a_0+1)$，其次找点 $P\left(a_0+\frac{a_1}{10}\right)$ 及 $P\left(a_0+\frac{a_1+1}{10}\right)$，又其次找点 $P\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}\right)$ 及 $P\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}\right)$，….

令

$$P_k=P\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{a_k}{10^k}\right),$$

$$Q_k=P\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{a_k+1}{10^k}\right).$$

则

$$P_1,P_2,\cdots,P_k,\cdots,\cdots,Q_k,\cdots,Q_2,Q_1$$

是 l 上依循一定次序排列着的点，而且线段 $\overline{P_kQ_k}$ 的长度是

$1/10^k$. 因为 l 上点与点之间没有空隙，所以唯一存在 l 上一个点 P，使 $P_1, P_2, \cdots$ 从一边接近 P，$Q_1, Q_2, \cdots$ 从另一边接近 P. 我们称 x 为点 P 的坐标.

倒过来，已给 l 上一点 P. 我们亦能够找到一个唯一的实数

$$x=a_0.a_1a_2\cdots$$

使 P 的坐标是 x. 所以实数与 l 上的点之间有一个一一对应.

在上面我们是用十进法来表示一个实数. 一般来说，对任何一个自然数 $n>1$，我们可以用 n 进法来表示一个实数. 换一句话来说，任何一个实数可以写成一个无穷级数

$$a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots,$$

其中 a_0 是一个整数，$a_1, a_2, \cdots$ 是不小于 0 而且不大于 $n-1$ 的整数. 再者，我们不妨假定不存在一个自然数 k，使

$$a_k=a_{k+1}=\cdots=n-1.$$

不论用无穷小数或用无穷级数来表示实数，我们不难去定义两个实数的和与积，而且还可以比较两个实数的大小. 再者，和、积及次序与表示的方法无关.

总结上面所说的，实数集 $\boldsymbol{R}$ 具有下列十六条性质.

R1. 对任何两个 $a, b\in\boldsymbol{R}$，唯一存在一个

$$a+b\in\boldsymbol{R},$$

称作 a 与 b 的和.

R2. 对任何 $a, b, c\in\boldsymbol{R}$，

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

R3. 唯一存在一个 0，称作零，使对任何 $a\in\boldsymbol{R}$，

$$a+0=a=0+a.$$

R4. 对任何 $a\in\boldsymbol{R}$，唯一存在一个 $-a\in\boldsymbol{R}$，称作 a 的负数，使

$$(-a)+a=0=a+(-a).$$

R5. 对任何 $a,b\in \boldsymbol{R}$,

$$a+b=b+a.$$

R6. 对任何两个 $a,b\in \boldsymbol{R}$,唯一存在一个

$$a\cdot b\in \boldsymbol{R},$$

称作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的积. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 亦写作

$$\boldsymbol{ab}.$$

R7. 对任何 $a,b,c\in \boldsymbol{R}$,

$$(ab)c = a(bc).$$

R8. 唯一存在一个异于 0 的 $1\in \boldsymbol{R}$,称作**单位元**,使对任何 $a\in \boldsymbol{R}$,

$$a1=a=1a.$$

R9. 对任何一个异于 0 的 $a\in \boldsymbol{R}$,唯一存在一个 $a^{-1}\in \boldsymbol{R}$,称作 a 的**倒数**,使 $a^{-1}a=1=aa^{-1}$.

R10. 对任何 $a,b\in \boldsymbol{R}$,

$$ab=ba.$$

R11. 对任何 $a,b,c\in \boldsymbol{R}$,

$$a(b+c) = ab+ac,$$

$$(b+c)a = ba+ca.$$

R12. 对任何 $a,b\in \boldsymbol{R}$,

$$a<b,\ a=b,\ a>b$$

这三个情形中有一个而且只有一个成立. 同时我们假定

$$a<b \iff b>a.$$

R13. 对任何 $a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$, $a<b,\ b<c \Longrightarrow a<c.$

R14. 对任何 $a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$,

$$a<b \iff a+c<b+c.$$

R15. 对任何 $a,\ b,\ c\in \boldsymbol{R}$

$$a<b,\ c>0 \Longrightarrow ac<bc.$$

R16. 已给一个 $A\subset \boldsymbol{R}$. 若 A 不是**空集** $\varnothing$（就是说，A 中至少有一个元素），而且存在一个 $u\in \boldsymbol{R}$，使对所有 $a\in A$，

$$a\leqq u \quad (\text{即 } a<u \text{ 或 } a=u),$$

则唯一存在一个 $u'\in \boldsymbol{R}$，满足下列两个条件：

(i) 对任何 $a\in A$，$a\leqq u'$.

(ii) 若 u 是一个实数使对任何 $a\in A$，$a\leqq u$，则 $u'\leqq u$. 换一句话来说，u' 是这些 u 之中最小的一个.

已给 $a\in \boldsymbol{R}$. 若 $a>0$，我们说 a 是**正的**；若 $a<0$，我们说 a 是**负的**.

极限的概念，在引进微分时是不可以或缺的. 所以在谈微分拓扑之前，我们必须了解极限是什么. 在每一本数学分析的书本中，对极限的处理，都有详尽的讨论，所以在这本书中，我们没有必要多谈. 不过我们仍旧要求每一位读者，凭直观的感觉，了解极限是什么，而且知道如何去运算.

一个**无穷实数列**，简称**数列**，通常写成

$$\{b_1, b_2, \cdots\} \quad \text{或} \quad \{b_k\}_{k\in N},$$

其中每一个 b_k 是一个实数. 假设存在一个实数 b，使当 k 无限地增大时，b_k 无限地接近 b，则 b 是唯一的，而且我们说数列 $\{b_k\}_{k\in N}$ 是**收敛的**，它的**极限**是 b. 用符号来表示，我们写成

$$\lim b_k = b.$$

严格地说，$\lim b_k = b$ 的意义是如下：对任何实数 $\varepsilon>0$，存在一个自然数 K，使对任何自然数 $k>K$，有

$$b-\varepsilon<b_k<b+\varepsilon.$$

凡读过数学分析的读者都知道，这是讨论极限的基础. 有关极限的结论，原则上我们应该据此来作证明，不过我们却采用直观方式. 在一条直线 l 上，将坐标等于 b_k 的点记作 P_k，而且将坐标等于 b 的点记作 P.（我们必须记住，为决定 l 上每一点的坐标，一

个先决条件是有一个坐标系，包括一个原点 O 和一个单位点 E.）于是 $\lim b_k=b$ 表示当 k 无限地增大时，点列

$$P_1, P_2, \cdots$$

无限地接近 P，也就是说线段 $\overline{P_kP}$ 无限地接近 0.

用这直观的感觉，我们不难理解下面的几个例子.

1. 数列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$$

是收敛的，它的极限是 0.

2. 数列

$$1, -1, 1, -1, \cdots$$

不是收敛的.

3. 已给一个实数 $x=a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots$. 则数列 $\left\{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_k}{n^k}\right\}_{k\in N}$ 和数列 $\left\{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_k+1}{n^k}\right\}_{k\in N}$ 是收敛的，它们的极限都是 x.

极限与加减乘除的关系是

(1.1) 已给 $\lim a_k=a$ 与 $\lim b_k=b$. 则

(1) $\lim (a_k+b_k) = a+b$,

(2) $\lim (a_k-b_k) = a-b$,

(3) $\lim (a_kb_k) = ab$,

(4) 当 $b_1, b_2, \cdots, b$ 都不等于 0 时，

$$\lim (a_k/b_k) = a/b.$$

(1.1) 的证明可以在任何一本数学分析的书中找到. 可是我们对读者只要求有一个很马虎的体会就够了. 以 (1.1) 的 (1) 为例子. 将一条直线 l 上坐标等于 x 的点记作 $P(x)$. 令

$$P_k = P(a_k), \ P = P(a),$$

$$Q_k = P(b_k),\ Q = P(b),$$
$$R_k = P(a_k + b_k),\ R = P(a + b).$$

我们知道当 k 无限地增大时，P_k 无限地接近 P，Q_k无限地接近 Q。因为$\overline{OP_k}$ 和$\overline{OQ_k}$的长度的和等于$\overline{OR_k}$ 的长度，而且$\overline{OP}$和$\overline{OQ}$的长度的和等于$\overline{OR}$的长度，所以当 k 无限地增大时，R_k 无限地接近 R。

(1.2) 数学归纳法。

已给一个陈述 $P(m), m \in N$。假设

(i) $P(1)$ 成立，

(ii) 若 $P(k)$ 成立，则 $P(k + 1)$ 成立。

则 $P(m)$ 对所有 $m \in N$ 成立。

证明： 令

$$N' = \{R \in N | P(k) 成立\},$$

就是说 N' 是所有使 $P(k)$ 成立的自然数 k 所构成的集。由假设知道，

(i) $1 \in N'$，

(ii) 若 $k \in N'$，则 $k+1 \in N'$。

所以由 $N3$ 知道 $N' = N$。

利用数学归纳法，我们不难证明

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2,$$
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6,$$
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = n^2(n + 1)^2/4.$$

§2 n 维欧氏空间

在平面解析几何中，一个点用两个有序实数

$$(x,y)$$

来表示，对任何两个点 (x,y) 与(x',y')，

$$(x,y)=(x',y') \Longleftrightarrow x=x,\ y=y'.$$

又任何两个点 (x,y) 与(x',y')之间的距离是

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

在立体解析几何中，一个点用三个有序实数

$$(x,y,z)$$

来表示，对任何两个点 (x,y,z) 与(x',y',z')，

$$(x,y,z)=(x',y',z') \Longleftrightarrow x=x',\ y=y',\ z=z'.$$

又任何两个点 (x,y,z) 与(x',y',z')之间的距离是

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

一般来说，n 维欧氏空间 R^n 中的一个点是用 n 个有序实数

$$(x_1,\cdots,x_n)$$

来表示，简写成

$$x.$$

对任何两个点

$$x=(x_1,\cdots,x_n),\qquad y=(y_1,\cdots,y_n)$$

我们假定

$$x=y \Longleftrightarrow x_1=y_1,\ \cdots,\ x_n=y_n.$$

又任何两个点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 之间的距离等于

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

于是 1 维欧氏空间 R^1 即实数集 R，而且以 (x_1) 来代替 x；2 维欧氏空间 R^2 即平面解析几何中的平面，而且以 (x_1,x_2) 来代替 (x,y)；3 维欧氏空间 R^3 即立体解析几何中的空间，而且以 (x_1,x_2,x_3) 来代替(x,y,z)。所以当 $n=1,2,3$ 时，我们可以将 R^n

看作直线，平面，空间；于是可以用图形来体会 $\boldsymbol{R}^n$ 中的成果，可是当 $n>3$ 时，现实的图形已经不再存在；于是只有用解析方法去表达。解析方法对 $n\leqq 3$ 或 $n>3$ 两情形并无区别。所以只要搞清楚 $n\leqq 3$ 时情形，就不难体会 $n>3$ 时情形。

n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个点

$$x=(x_1,\cdots,x_n)$$

亦可以看作一个由原点

$$\theta=(0,\cdots,0)$$

至 x 的向量

$$\overrightarrow{\theta x}.$$

于是 $\boldsymbol{R}^n$ 成为一个**向量空间**。在这向量空间中我们有一个加法，就是说对 $\boldsymbol{R}^n$ 中任何两个向量

$$x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n),$$

它们的**和**是

$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n).$$

在这向量空间中我们还有一个乘法，就是说对任何 $r\in\boldsymbol{R}$ 及 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$，它们的**积**是

$$rx=(rx_1,\cdots,rx_n).$$

当 $n=1$ 时，这加法和乘法就是 $\boldsymbol{R}$ 中的加法和乘法。

当 $n=2$ 时，这加法和乘法可以用图 1.4 来表示。对任何 x，$y\in\boldsymbol{R}^2$，我们有一个向量

$$\overrightarrow{xy}=(y_1-x_1,y_2-x_2).$$

于是对任何 x，$y\in\boldsymbol{R}^2$，

$$x+y=\overrightarrow{\theta x}+\overrightarrow{\theta y}$$

可以用图 1.5 来表示，其中点

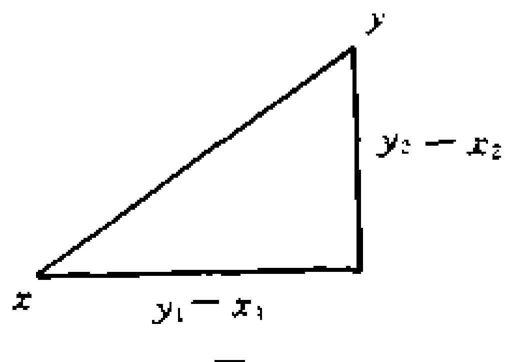


图 1.4

$\theta, x, y, x+y$ 是一个平行四边形的顶点。

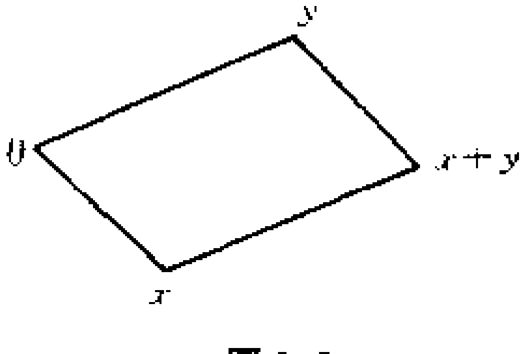


图 1.5

对任何 $r \in \boldsymbol{R}$ 及 $x \in \boldsymbol{R}^2$，向量 rx 的方向，依据 r 是正的或负的，与 x 的方向相同或相反，而且向量 rx 的长度等于 x 的长度的 $|r|$ 倍，这里的 $|r|$ 是 r 的**绝对值**。它的定义是

$$|r| = \begin{cases} r & \text{若 } r \geqq 0, \\ -r & \text{若 } r < 0. \end{cases}$$

当 $n=3$ 时，在这向量空间中的加法和乘法亦可以用图形来表示。因为与 $n=2$ 时很类似，所以从略，而且请读者自己去想想。

在 $\boldsymbol{R}^2$ 中的点、直线及 $\boldsymbol{R}^2$ 自己，在 $\boldsymbol{R}^3$ 中的点、直线、平面及 $\boldsymbol{R}^3$ 自己，都是值得我们特别注意的。同样地，在 $\boldsymbol{R}^n$ 中我们须特别注意 m 维平面，$m=0, 1, \cdots, n$。

已给 $\boldsymbol{R}^n$ 中两个不同点 a_0 与 a_1，则当 $n=2$ 或 3 时，

$$a_0a_1 = \{r_0a_0 + r_1a_1 | r_0, r_1 \in \boldsymbol{R}, r_0 + r_1 = 1\}$$

是一条由 a_0 与 a_1 决定的直线。所以对一般 n，我们亦称 a_0a_1 是一条由 a_0 与 a_1 决定的**直线**。

我们称 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 **0 维平面**。于是任何一个 0 维平面由其中唯一的点决定。我们称 $\boldsymbol{R}^n$ 中的直线为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 **1 维平面**。若 a_0a_1 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个 1 维平面，而且 b_0 与 b_1 是 a_0a_1 中两个不同点，则

$$b_0 = r_{00}a_0 + r_{01}a_1, \quad r_{00}, r_{01} \in \boldsymbol{R}, \ r_{00} + r_{01} = 1,$$
$$b_1 = r_{10}a_0 + r_{11}a_1, \quad r_{10}, r_{11} \in \boldsymbol{R}, \ r_{10} + r_{11} = 1.$$

因为 $b_0 \neq b_1$，由解上面的联立方程式，我们可以得到

$$a_0=s_{00}b_0+s_{01}b_1,\quad s_{00},\ s_{01}\in \boldsymbol{R},\ s_{00}+s_{01}=1,$$
$$a_1=s_{10}b_0+s_{11}b_1,\quad s_{10},\ s_{11}\in \boldsymbol{R},\ s_{10}+s_{11}=1 .$$
所以 $a_0a_1=b_0b_1$ 。这证明了任何一个 1 维平面由其中任何两个不同的点决定。

我们称 $\boldsymbol{R}^n$ 中任何一个点是**独立的**，而且称 $\boldsymbol{R}^n$ 中任两个不同的点是**独立的**。于是一个 0 维平面由其中唯一的独立的点所决定，而且一个 1 维平面由其中任何两个独立的点所决定。

一般而论，假设我们已经定义了 $\boldsymbol{R}^n$ 的 m 维平面及 $\boldsymbol{R}^n$中的 $m+1$ 个独立的点，而且知道有下面的三条性质：

(i) 在一个 m 维平面中有 $m+1$ 个独立的点。

(ii) 若 $m+1$ 个点是独立的，则其中任何 $i+1$ 个点是独立的，$i=0$，…，m 。

(iii) 若 a_0，…，a_m 是一个 m 维平面 P^m 中 $m+1$ 个独立的点，则 P^m 中任何一个点可以唯一写成

$$r_0a_0+\cdots+r_ma_m,\ r_0,\ \cdots,\ r_m\in \boldsymbol{R},\ r_0+\cdots+r_m=1 .$$

而且 P^m 是所有这些点所构成的集。我们不难见到这个假设在 $m=1$ 时成立。

如果 P^m 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个 m 维平面，a_{m+1}是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个不在 P^m 上的点，则对 P^m 中任何 $m+1$ 个独立的点 a_0，…，a_m，我们称 a_0，…，a_m，a_{m+1}为 $m+2$ 个**独立的**点，而且称

$$P^ma_{m+1}=\{r_0a_0+\cdots+r_{m+1}a_{m+1}\mid r_0,\cdots,r_{m+1}\in \boldsymbol{R},\ r_0+\cdots+r_{m+1}=1\}$$

为一个 $m+1$ **维平面**，由 P^m 与 a_{m+1}所决定。如此定义的 $m+1$ 维平面及 $m+2$ 个独立的点亦有上面所说的三条性质，就是说我们能够证明下面的结果：

(i) 在一个 $m+1$ 维平面中有 $m+2$ 个独立的点。

(ii) 若 $m+2$ 个点是独立的，则其中任何 $i+1$ 个点是独立

的，$i=0, \cdots, m+1$。

(iii) 若 $a_0, \cdots, a_{m+1}$是一个 $m+1$ 维平面 P^{m+1}中 $m+2$ 个独立的点，则 P^{m+1}中任何一个点可以唯一写成

$$r_0a_0+\cdots+r_{m+1}a_{m+1}, \ r_0, \cdots, r_{m+1}\in \boldsymbol{R}, \ r_0+\cdots+r_{m+1}=1 .$$

而且 P^{m+1}是所有这些点所构成的集。

这个证明并不难，可是繁杂得很。在这里从略，水平高的读者应该自己去尝试证明。

因为我们已经定义了 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 1 维平面及 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 2 个独立的点，而且知道有上面所说的三条性质，所以我们能够定义 2 维平面及 3 个独立的点，3 维平面及 4 个独立的点，……，一直到 n 维平面及 $n+1$ 个独立的点。

我们还能够证明下面的结果：

(2·1) $\boldsymbol{R}^n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中唯一的 n 维平面，所以对任何 $m>n$，在 $\boldsymbol{R}^n$中不存在 m 维平面。

(2·2) 对任何 $m=0, \cdots, n$，我们有 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 m 维平面及 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 $m+1$ 个独立的点 $a_0, a_1, \cdots, a_m$，而且知道 (i)，(ii)，(iii) 三条性质成立。

(2·3) $\boldsymbol{R}^n$ 中 $m+1$ 个点是独立的一个充要条件是这些点不在同一个 $m-1$ 维平面上。

第二章　点集拓扑

§3　欧氏空间的点集拓扑

对任何 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$，我们令

$$\|x\|=\sqrt{(x_1)^2+\cdots+(x_n)^2},$$

而且称 $\|x\|$ 为 x 的范数。

(3·1)(1) 对任何 $x\in\boldsymbol{R}^n$，

$$\|x\|\geqq 0$$

而且

$$\|x\|=0\Longleftrightarrow x=\theta=(0,\cdots,0).$$

(2)　对任何 $r\in\boldsymbol{R}$ 及 $x\in\boldsymbol{R}^n$，

$$\|rx\|=|r|\,\|x\|.$$

(3)　对任何 x，$y\in\boldsymbol{R}^n$，令

$$x\cdot y=x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

则

$$|x \cdot y| \leqq \|x\| \|y\| .$$

(4)　对任何 x，$y \in \boldsymbol{R}^n$，

$$\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\| .$$

证明：(1)　对任何 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$，

$$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2} \geqq 0$$

而且

$$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 = 0$$
$$\Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Longleftrightarrow x = \theta .$$

(2)　对任何 $r \in \boldsymbol{R}$ 及 $x \in \boldsymbol{R}^n$，

$$\|rx\| = \sqrt{(rx_1)^2 + \cdots + (rx_n)^2}$$
$$= \sqrt{r^2((x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2)} = |r| \|x\| .$$

(3)　已给 x，$y \in \boldsymbol{R}^n$。若 $\|x\| = 0$，则

$$\|x \cdot y\| = 0 = \|x\| \|y\| .$$

若 $\|x\| > 0$，则对任何 λ，$\mu \in \boldsymbol{R}$，

$$0 \leqq \|\lambda x + \mu y\|^2 = (\lambda x + \mu y) \cdot (\lambda x + \mu y)$$
$$= \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu(x \cdot y) + \mu^2 \|y\|^2$$
$$= \left(\lambda \|x\| + \mu \frac{x \cdot y}{\|x\|}\right)^2$$
$$+ \mu^2 \left(\frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2}{\|x\|^2}\right).$$

于是 $\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2 \geqq 0$ 或

$$|x \cdot y| \leqq \|x\| \|y\| .$$

(4)　对任何 x，$y \in \boldsymbol{R}^n$，

$$\|x+y\|^2 = (x+y) \cdot (x+y)$$
$$= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2$$
$$\leqq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \text{(由(3))}$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

所以

$$\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\| .$$

对任何 $x, y \in \boldsymbol{R}^n$，

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

是 x 与 y 之间的距离，我们称 ρ 为欧氏空间的**距离函数**。

由（3.1），我们得到

（3.2）（1）　对任何 $x, y \in \boldsymbol{R}^n$，

$$\rho(x,y) \geqq 0,$$

而且

$$\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y .$$

（2）　对任何 $x, y \in \boldsymbol{R}^n$，

$$\rho(x,y) = \rho(y,x) .$$

（3）　对任何 $x, y, z \in \boldsymbol{R}^n$，

$$\rho(x,z) \leqq \rho(x,y) + \rho(y,z) .$$

假设

$$X \subset \boldsymbol{R}^n .$$

在 X 中的一个**无穷点列**，简称**点列**，是

$$\{a_1, a_2, \cdots\} \text{ 或 } \{a_k\}_{k\in N},$$

其中每一个 a_k 是 X 中的一个点。已给 X 中一个点列 $\{a_k\}_{k\in N}$。若存在一个点 $a \in X$，使

$$\lim \rho(a_k, a) = 0,$$

则点 a 是唯一的，而且我们说点列 $\{a_k\}_{k\in N}$ 是**收敛的**，它的**极限**是 a，用符号来表示，我们写作

$$\lim a_k = a .$$

（3.3）　假设

$$a_k = (x_{k1}, \cdots, x_{kn}), \quad k \in N,$$

$$a=(x_1,\cdots,x_n),$$

则

$$\lim a_k=a \Longleftrightarrow \lim x_{ki}=x_i,\ i=1,\ \cdots,\ n.$$

当 $n=1$，2，3 时，(3.3) 的成立可以由图形去体会，至于(3.3) 的证明，因与(1.1) 的证明类似，从略。

对任何一个 $X\subset\boldsymbol{R}^n$，添上这个极限观念，我们称 X 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个**拓扑空间**，或 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个**子空间**。在这本书中的拓扑空间限于欧氏空间中的拓扑空间。这一点与普通点集拓扑书本中不同，特请读者们留意。

已给两个欧氏空间中的拓扑空间

$$X\subset\boldsymbol{R}^n,\ X'\subset\boldsymbol{R}^{n'}.$$

及一个函数

$$f:\ X\longrightarrow X'.$$

(在集论中，一个**函数** $f:X\to X'$ 是一个规则，使对任何 $x\in X$，我们能够用那个规则唯一决定一个 $f(x)\in X'$，称为 x 的**映象**。比如说在微积分中，我们有函数

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4:\ \boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R},$$

它们的定义分别是

$$f_1(x)=\sqrt[3]{x},$$
$$f_2(x)=e^x,\quad (e\text{ 是指数函数的底})$$
$$f_3(x)=x^3-3x,$$
$$f_4(x)=x^2.)$$

设 $a\in X$ 是一个点。如果对 X 中任何一个以 a 为极限的收敛点列 $\{a_k\}_{k\in N}$，它的象 $\{f(a_k)\}_{k\in N}$ 一定是 X' 中一个以 $f(a)$ 为极限的收敛点列，我们说函数 $f:\ X\to X'$ **在点 a 是连续的**。若 $f:\ X\to X'$ 在每一个点 $a\in X$ 都是连续的，我们说 $f:\ X\to X'$ 是**连续的**。以后我们称连续函数为**映射**。在这里我们应当注意

到，上面所给的 f_1，f_2，f_3，f_4：$\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 都是映射。

对任何 $x'\in X'$，我们令

$$f^{-1}(x')=\{x\in X\mid f(x)=x'\}.$$

若对任何 $x'\in X'$，$f^{-1}(x')$ 中至多有一个点，我们说 f 是**一对一的**，若对任何 $x'\in X'$，$f^{-1}(x')$ 中至少有一个点，我们说 f **是满的**。若 f 是一对一的，也是满的，我们说 f 是一个**一一对应**。若 f 是一个一一对应，则对任何 $x'\in X'$，$f^{-1}(x')$ 中恰好只有一个点，也记作 $f^{-1}(x')$。于是我们有一个函数

$$f^{-1}:X'\to X$$

也是一个一一对应。

在上面所给的四个函数中，f_1 是一个一一对应，f_2 是一对一的但不是满的，f_3 是满的但不是一对一的，f_4 既不是一对一的也不是满的。

如果 $f:X\to X'$ 是一个一一对应，而且 f 与 f^{-1} 都是连续的，我们称 $f:X\to X'$ 为一个**同胚**。若在两个拓扑空间之间存在一个同胚，我们说它们是**同胚的**。拓扑学是研讨在同胚下不变的性质，也就是说，凡 X 具有的性质，与 X 同胚的 X' 都具有。

(3.4)　已给 $X\subset\boldsymbol{R}^n$，$X'\subset\boldsymbol{R}^{n'}$，$X''\subset\boldsymbol{R}^{n''}$ 及

$$f:X\to X',\ g:X'\to X'',$$

而且令

$$gf:X\to X''$$

的定义为

$$(gf)(x)=g(f(x)).$$

(1)　若 f 与 g 是连续的，则 gf 亦是连续的。

(2)　若 f 与 g 是同胚，则 gf 亦是同胚。

用直观去体会 (3.4) 不困难，证明(3.4) 亦不困难，请读者依自己的水平自我处理。

对任何两个实数 $a<b$，我们令

$$(a,b)=\{t\in \boldsymbol{R} \mid a<t<b\},$$
$$[a,b)=\{t\in \boldsymbol{R} \mid a\leqq t<b\},$$
$$(a,b]=\{t\in \boldsymbol{R} \mid a<t\leqq b\},$$
$$[a,b]=\{t\in \boldsymbol{R} \mid a\leqq t\leqq b\}.$$

我们称 (a,b) 为一个**开区间**，称 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 为**半开区间**，称 $[a,b]$ 为一个**闭区间**。为方便起见，我们称一个实数 a 为一个**退化的**闭区间 $[a,a]$。

对任何实数 a，我们令

$$(a,\infty)=\{t\in \boldsymbol{R} \mid a<t\},$$
$$[a,\infty)=\{t\in \boldsymbol{R} \mid a\leqq t\},$$
$$(-\infty,a)=\{t\in \boldsymbol{R} \mid t<a\},$$
$$(-\infty,a]=\{t\in \boldsymbol{R} \mid t\leqq a\}.$$

(3.5) (1) (a,b)，(a,∞)，$(-\infty,a)$，$\boldsymbol{R}$ 是相互同胚的。

(2) $[a,b]$ 和 $[0,1]$ 是同胚的

(3) $[a,b)$，$(a,b]$，$[a,\infty)$，$(-\infty,a]$ 是相互同胚的。

证明：这些结论可以由下面几个特殊情形及（3.4）的（2）得到。

(i) 若 $f:(0,1)\to(0,\infty)$，$f:[0,1)\to[0,\infty)$，$f:(-1,0)\to(-\infty,0)$，$f:(-1,0]\to(-\infty,0]$，$f:(-1,1)\to\boldsymbol{R}$ 的定义是

$$f(t)=\frac{t}{(1+t)(1-t)},$$

则 f 是一个同胚。

(ii) 若 f：$(0,1)\to(a,b)$，f：$[0,1)\to[a,b)$，f：$(0,1]\to(a,b]$，f：$[0,1]\to[a,b]$ 的定义是

$$f(t)=(1-t)a+tb,$$

则 f 是一个同胚。

(iii) 若 f：$(0, 1] \to [0, 1)$ 的定义是

$$f(t) = 1 - t,$$

则 f 是一个同胚。

由(3.5)，我们知道**长度不是一个拓扑性质**。

(3.6) 在 $\mathbf{R}^2$ 中，单位圆 $S^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ 与由一个多角形的边所构成的拓扑空间是同胚的。

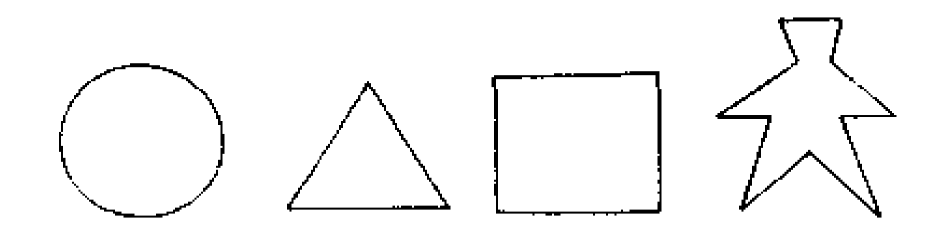


图 2.1

§4 基本拓扑概念

对任何 $a \in \mathbf{R}^n$ 及任何实数 $r > 0$，我们令

$$B^n(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x,a) < r\},$$

则 $B^1(a,r) = (a-r, a+r)$ 是一个开区间，它的中点是 a，而且它的长度等于 $2r$ 。$B^2(a,r)$ 是一个没有边缘的圆盘，它的中心是 a，而且它的半径等于 r 。$B^3(a,r)$ 是一个没有边缘的球体，它的中心是 a，而且它的半径等于 r 。我们称 $B^n(a,r)$ 为一个中心是 a 而且半径等于 r 的 **n 维开球体**。

已给 $U \subset \mathbf{R}^n$ 。若对任何 $a \in U$，存在一个实数 $r > 0$，使 $B^n(a,r) \subset U$，我们称 U 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**开集**。

(4.1)　对任何 $a\in \boldsymbol{R}^n$ 及 $r>0$，$B^n(a,r)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集。（这是我们称 $B^n(a,r)$ 为一个 n 维开球体的原因。）

证明：若 $b\in B^n(a,r)$，而且 $s=r-\rho(a,b)$，则 $s>0$，而且 $B^n(b,s)\subset B^n(a,r)$。

(4.2)（1）空集 $\varnothing$ 及 $\boldsymbol{R}^n$ 自己是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集。

（2）若 $U_1,\cdots,U_m$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 m 个开集，则它们的**交集**

$U_1\cap\cdots\cap U_m=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x\in U_i,\ i=1,\cdots,m\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集。

（3）若 $\{U_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一族开集，其个数可以是有限，也可以是无限，（为了解得明确些，请参阅附录）则它们的**并集**

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\text{存在一个}\ \lambda\in\Lambda,\text{使}\ x\in U_\lambda\}$$

是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集。

证明：（1）由开集的定义，我们能够直接看到 $\varnothing$ 及 $\boldsymbol{R}^n$ 自己是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集。

（2）若 $a\in U_1\cap\cdots\cap U_m$，则存在正实数 $r_1,\cdots,r_m$，使

$$B^n(a,r_i)\subset U_i,\ i=1,\cdots,m.$$

将 $r_1,\cdots,r_m$ 中最小的记作 r，则

$$B^n(a,r)\subset U_1\cap\cdots\cap U_m.$$

（3）若 $a\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$，则存在一个 $\mu\in\Lambda$，使 $a\in U_\mu$，于是存在一个正实数 r，使

$$B^n(a,r)\subset U_\mu\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda.$$

已给 $F\subset\boldsymbol{R}^n$。若

$$\boldsymbol{R}^n-F=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x\notin F\}$$

是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，我们称 F 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个**闭集**。

(4.3)（1）空集 $\varnothing$ 与 $\boldsymbol{R}^n$ 自己是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的闭集。

（2）若 $F_1,\cdots,F_m$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 m 个闭集，则它们的**并集**

$F_1\cup\cdots\cup F_m=\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid$ 存在一个 i，使 $x\in F_i\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个闭集。

(3) 若 $\{F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一族闭集，则它们的交集

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda=\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid x\in F_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$$

是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个闭集。

(4.3) 的证明类似(4.2) 的证明，从略。

(4.4) 对任何 $A\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{R}^n$ 中唯一存在一个最小的闭集

$$\overline{A},$$

使 $A\subset\overline{A}$ 。我们称 $\overline{A}$ 为 A 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的闭包。

证明：令

$$\mathscr{F}=\{F \mid F \text{ 是 } \boldsymbol{R}^n \text{ 中的闭集}, A\subset F\}.$$

则

$$\overline{A}=\bigcap_{F\in\mathscr{F}}F\ .$$

例如在 $\boldsymbol{R}$ 中，

$$\overline{(a,b)}=\overline{[a,b)}=\overline{(a,b]}=\overline{[a,b]}=[a,b].$$

已给 $a\in\boldsymbol{R}^n$ 。a 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个邻域是一个包含 a 的 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集。

(4.5) 已给 $A\subset\boldsymbol{R}^n$，则一点 $a\in\boldsymbol{R}^n$ 是 $\overline{A}$ 中一个点的一个充要条件是对 a 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任何一个邻域 U，$U\cap A\neq\varnothing$。

已给一个 $\boldsymbol{R}^n$ 中的拓扑空间 X 。若 U 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，我们称

$$X\cap U$$

为 X 中的开集。若 F 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的闭集，我们称

$$X\cap F$$

为 X 中的闭集。

(4.6) 在(4.2)，(4.3)，(4.4) 和(4.5) 中将 $\boldsymbol{R}^n$ 改为一个 $\boldsymbol{R}^n$

中的拓扑空间 X，这些结果依旧成立。

(4.7) 已给 $X\subset\mathbf{R}^n$，$X'\subset\mathbf{R}^{n'}$及一个函数 $f: X\to X'$，则 f 是连续的一个充要条件是对任何一个 X' 中的开集 U'，

$$f^{-1}(U')=\{x\in X\,|\,f(x)\in U'\}$$

是一个 X 中的开集。

证明：假设在 X' 中有一个开集 U'，使 $f^{-1}(U')$ 不是 X 中的开集。则在 $f^{-1}(U')$ 中存在一点 a，使对任何 $k\in\mathbf{N}$，$B^n(a,1/k)-f^{-1}(U')\neq\varnothing$。对每一个 $k\in\mathbf{N}$，取一点 $a_k\in B^n(a,1/k)-f^{-1}(U')$。则$\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是 X 中一个收敛点列，满足 $\lim a_k=a$。因为 $f(a)\in U'$，而且 U' 是 X' 中一个开集，于是存在一个 $r>0$，使对任何 $x'\in X'-U'$，$\rho(x';f(a))\geqq r$。因此对任何 $k\in\mathbf{N}$，$\rho(f(x_k),f(a))\geqq r$。这证明了 f 不是连续的。

倒过来，假设对 X' 中任何一个开集 U'，$f^{-1}(U')$ 是 X 中一个开集。若 $a\in X$，而且 $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是 X 中一个收敛点列，满足 $\lim a_k=a$，我们只要证明 $\{f(a_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$是 X' 中一个收敛点列，而且满足 $\lim f(a_k)=f(a)$，就知道 f 是连续的了。

对任何 $r>0$，$X'\cap B^{n'}(f(a),r)$ 是 X' 中一个开集。由假设，$f^{-1}(X'\cap B^{n'}(f(a),r))$ 是 a 的一个邻域。于是存在一个 $K\in\mathbf{N}$，使对任何 $k=K+1,\ K+2,\ \cdots$，

$$a_k\in f^{-1}(X'\cap B^{n'}(f(a),r)),$$

即 $$f(a_k)\in X'\cap B^{n'}(f(a),r),$$

所以 $\lim f(a_k)=f(a)$。

(4.8) 已给 $X\subset\mathbf{R}^n$，$X'\subset\mathbf{R}^{n'}$及一个函数 $f: X\to X'$。则 f 是连续的一个充要条件是对 X' 中任何一个闭集 F'，

$$f^{-1}(F')=\{x\in X\,|\,f(x)\in F'\}$$

是一个 X 中的闭集。

(4.9) 已给 $X\subset\mathbf{R}^n$，$X'\subset\mathbf{R}^{n'}$及一个一一对应 $f: X\to X'$。

则下列三个陈述是等价的，就是说在三个陈述中若有一个成立，则其他两个亦成立。

(i) f 是一个同胚。

(ii) 对任何 $U\subset X$，U 是 X 中的一个开集的一个充要条件是 $f(U)$ 是 X' 中的一个开集。

(iii) 对任何 $F\subset X$，F 是 X 中的一个闭集的一个充要条件是 $f(F)$ 是 X' 中的一个闭集。

第3节中说过，长度、距离都不是拓扑概念，现在，由(4.9)，我们知道开集和闭集是拓扑概念。因此，凡是可以用开集、闭集来刻划的概念，都是拓扑概念，如下面将介绍的连通性和紧性的概念。

已给 $X\subset \boldsymbol{R}^n$ 。如果不存在 X 中两个开集 U 和 V，使

$$U\neq\varnothing,\ V\neq\varnothing,\ U\cup V=X,\ U\cap V=\varnothing,$$

我们说 X 是**连通的**。因为开集是一个拓扑概念，所以连通性质也是一个拓扑概念。

(4.10) $[0,1]$ 是连通的。

证明：若 $[0,1]$ 不是连通的，则存在 $[0,1]$ 中两个开集 U 和 V，使

$$U\neq\varnothing,\ V\neq\varnothing,\ U\cup V=[0,1],\ U\cap V=\varnothing.$$

在这里我们不妨假定$0\in U$. 令

$$A=\{t\in[0,1]\mid \text{若 } 0\leqq t'\leqq t,\text{则 } t'\in U\}.$$

因为$0\in A$，而且 $A\subset[0,1]$，于是由 $\boldsymbol{R}16$知道唯一存在一个 $u'\in\boldsymbol{R}$，满足下面两个条件：

(i) 对任何 $t\in A$，$t\leqq u'$。

(ii) 若 u 是一个实数，使对任何 $t\in A$，
$t\leqq u$，则 $u'\leqq u$ 。

若 $u'\in U$，则存在一个 $b\in(u',1)$，使$[u',b)\subset U$. 于是$(u',$

$b) \subset A$，与(i) 矛盾。

若 $u' \in V$，则存在一个 $u \in (0,u')$，使 $(u,u'] \subset V$。于是对任何 $t \in A$，$t \leqq u < u'$，与(ii) 矛盾。

(4.11) 已给 $X \subset \boldsymbol{R}^n$。若对任何 a，$b \in X$，存在一个映射 α：$[0，1] \to X$，使 $\alpha(0)=a$，$\alpha(1)=b$，则 X 是连通的。

证明：若 X 不是连通的，则存在 X 中两个开集 U 和 V，使

$$U \neq \varnothing，V \neq \varnothing，U \cup V = X，U \cap V = \varnothing。$$

在 U 中取一点 a，在 V 中取一点 b。由假设，我们知道有一个映射 α：$[0,1] \to X$，使 $\alpha(0)=a$，$\alpha(1)=b$。于是由(4.6)知道 $\alpha^{-1}(U)$ 和 $\alpha^{-1}(V)$ 是 $[0,1]$ 中两个开集，满足

$$\alpha^{-1}(U) \neq \varnothing, \alpha^{-1}(V) \neq \varnothing,$$

$$\alpha^{-1}(U) \cup \alpha^{-1}(V) = [0,1],$$

$$\alpha^{-1}(U) \cap \alpha^{-1}(V) = \varnothing.$$

这表示 $[0,1]$ 不是连通的，与(4.10) 矛盾。

由(4.11)，我们知道：

(4.12) 开区间 $(a，b)$，半开区间 $[a，b)$，$(a，b]$，以及 $(a，\infty)$，$[a，\infty)$，$(-\infty，b)$，$(-\infty，b]$，$\boldsymbol{R}$ 都是连通的。

已给 $X \subset \boldsymbol{R}^n$。若存在一个正实数 M，使对任何 $x \in X$，$\|x\| \leqq M$，我们说 M 是**有界的**。

X 的一个**开覆盖**是由一群 X 中的开集所构成的集 $\mathscr{U}$，使 $\bigcup_{U \in \mathscr{U}} U = X$。若 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是 X 的开覆盖，而且 $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$，我们称 $\mathscr{V}$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个**子开覆盖**。

若 $\{a_1，a_2，\cdots\}$ 是 X 中一个点列，而且 $k_1 < k_2 < \cdots$ 是一个自然数列，我们称

$$\{a_{k_1}，a_{k_2}，\cdots\}$$

是 $\{a_1，a_2，\cdots\}$ 的一个**子点列**。

(4.13) 对任何 $X \subset \boldsymbol{R}^n$，下列三个条件是等价的。

(i) X 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个有界的闭集。

(ii) X 的每一个开覆盖有一个**有限的**子开覆盖。

(iii) X 中的每一个点列有一个**收敛的**子点列。

(4.13) 的证明相当繁杂，但是可以在一般点集拓扑的书本中找到，所以从略。

若 $X\subset\boldsymbol{R}^n$ 满足(4.13)三个条件中的一个，则 X 亦满足其他两个条件。我们说 X 是**紧的**。紧的概念也是一个拓扑概念。

(4.14) (1) 若 $X'\subset X\subset\boldsymbol{R}^n$，而且 X' 是紧的，则 X' 是 X 中的一个闭集。

(2) 若 $f: X\to X'$ 是一个满的映射，而且 X 是紧的，则 X' 亦是紧的。

用(4.13)去证明相当容易，请读者自己去试试。

对任何两个集 X 和 Y，我们令

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}.$$

这里的 (x, y) 是由 x 和 y 所构成的**有序元素对**，就是说对任何 $(x, y), (x',y')\in X\times Y$，

$$(x,y)=(x',y')\Longleftrightarrow x=x', y=y'.$$

我们称 $X\times Y$ 为 X 与 Y 的积。利用积的概念，我们可以令

$$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{n+1},$$

这就是说对任何 $x=(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}^n$ 与 $t\in\boldsymbol{R}$，我们将 (x, t) 看作 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的点 $(x_1, \cdots, x_n, t)$。因此对任何 $X\subset\boldsymbol{R}^n$，

$$X\times[0, 1]\subset\boldsymbol{R}^{n+1}.$$

同样地，对任何 $n, n'=0, 1, \cdots$，

$$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^{n'}=\boldsymbol{R}^{n+n'}.$$

已给 $X\subset\boldsymbol{R}^n$，$X'\subset\boldsymbol{R}^{n'}$ 及两个映射

$$f_0, f_1: X\longrightarrow X'.$$

若

$$F: X\times[0,1]\longrightarrow X'$$

是一个映射，使对任何 $x\in X$

$$F(x,0)=f_0(x),\ F(x,1)=f_1(x),$$

我们说 F 是 f_0 与 f_1 之间的一个**同伦**。如果在 f_0 与 f_1 之间存在一个同伦，我们说 f_0 与 f_1 是**同伦的**。

已给 $X\subset R^n$ 与 $X'\subset R^{n'}$ 及两个映射

$$f: X\longrightarrow X',\ g: X'\longrightarrow X.$$

若 $gf: X\rightarrow X$ 与**恒等映射** $i_x: X\rightarrow X$ 是同伦的（$i_x: X\rightarrow X$ 的定义是 $i_x(x)=x$），而且 $fg: X'\rightarrow X'$ 与恒等映射 $i_{X'}: X'\rightarrow X'$ 也是同伦的，我们说 X 与 X' 有相同的**同伦型**，而且 f 是一个由 X 到 X' 的**同伦等价**。

若 $D^n=\{x\in R^n|\ \|x\|\leq 1\}$，而且 $a\in D^n$，则 a 与 D^n 有相同的同伦型，而且恒等嵌入 $i: a\rightarrow D^n$ 是一个同伦等价。

已给一个映射 $f: X\rightarrow X'$，若 $f: X\rightarrow f(X)(=\{f(x)|x\in X\})$ 是一同胚，我们称 f 为一个**拓扑嵌入**。

已给两个拓扑嵌入 $f_0, f_1: X\rightarrow X'$，若 $F: X\times[0,1]\rightarrow X'$ 是一个映射，使对任何 $t\in[0,1]$，$f_t(x)=F(x,t)$ 定义了一个拓扑嵌入

$$f_t: X\longrightarrow X',$$

我们说 F 是 f_0 与 f_1 之间的一个**同痕**。如果在 f_0 与 f_1 之间存在一个同痕，我们说 f_0 与 f_1 是**同痕的**。

§5 几个不容易由直觉体会到的现象

对任何一个自然数 n，存在一个满的映射

$$f: R\longrightarrow R^n$$

吗？直觉上，$f(\boldsymbol{R})=\{f(x)\mid x\in\boldsymbol{R}\}$似乎只是$\boldsymbol{R}^n$中一条曲线，填不满$\boldsymbol{R}^n$全部。但是这想法是错的，原因是在直觉中不会想到希奇古怪的映射。

首先让我们作**康托尔间断集**。令

$$X_0=[0,\ 1].$$

则X_0是一个闭区间，它的长度等于1。现在我们去掉X_0中央长度等于1/3的开区间（1/3，2/3），余下的是

$$X_1=[0,\ 1/3]\cup[2/3,\ 1],$$

由两个长度等于1/3的闭区间所构成，接着对x_1中每个闭区间去掉中央长度等于$1/3^2$的开区间，余下的是

$$X_2=[0,\ 1/3^2]\cup[2/3^2,\ 3/3^2]\cup[6/3^2,\ 7/3^2]\cup[8/3^2,\ 1],$$

由2^2个长度等于$1/3^2$的闭区间所构成。如此继续作下去，我们得到一个无穷序列的集

$$X_0\supset X_1\supset X_2\supset X_3\supset\cdots,$$

其中X_k是由2^k个长度等于$1/3^k$的闭区间所构成。

X_0 ————————————————————————

X_1 ————————　　　　　　　　————————

X_2 ———　　———　　　　　　　　———　　———

……

这些集的交集

$$D=X_0\cap X_1\cap X_2\cap\cdots=\bigcap_{k=0}^{\infty}X_k$$

就是康托尔间断集。因为X_k是由2^k个长度等于$1/3^k$的闭区间所构成，它的总长度等于$2^k/3^k$。所以D若有“长度”的话，它的“长度”等于

$$\lim 2^k/3^k=0.$$

(5.1)　D中任何一个数可以用无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots$$

来表示，其中每一个 a_k 等于 0 或 2 。再者，这个表示是唯一的。

证明：已给一个无穷数列

$$\{a_k\}_{k\in N}=\{a_1,a_2,\cdots\},$$

其中每一个 a_k 等于 0 或 1 或 2，则无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$$

是收敛的，而且它的和是 [0，1] 中一个数。倒过来，[0，1] 中任何一个数可以用这样的无穷级数来表示。（见§1.）我们能够证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\in X_1 \iff a_1\neq 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\in X_2 \iff a_1\neq 1,\ a_2\neq 1,$$

……

一般地，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\in X_n \iff a_1\neq 1,\ \cdots,\ a_n\neq 1 .$$

所以 D 中每一个数可以写成 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$，其中每一个 a_k 等于 0 或 2 。

假设 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{3^k}$ 是 D 中两个数，而且至少有一个 k，使 $a_k\neq b_k$ 。我们则不妨假定

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots,\ a_n=b_n,$$
$$a_{n+1}=0,\ b_{n+1}=2.$$

用计算我们知道

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{3^k},$$

所以这样表示的方法是唯一的。

(5.2) 令

$$g: D \longrightarrow [0,1]$$

的定义为

$$g\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^{k+1}}.$$

则 g 是一个满的映射。

证明：由定义我们知道对任何 x，$y \in D$，

$$x \leqq y \Longrightarrow g(x) \leqq g(y), g(y)-g(x) \leqq y-x.$$

所以 g 是连续的。

$[0,1]$ 中任何一个数可以写成 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{2^k}$，其中每一个 c_k 等于 0 或 1。于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2c_k}{3^k}\in D,\quad g\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2c_k}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{2^k}.$$

所以 g 是满的。

上面已经说过，若 D 有“长度”的话，则“长度”等于0。可是 (5.2) 说存在一个满的映射 $g: D \to [0,1]$，也就是说可以经过一个映射 g，将“长度”等于 0 的 D，去填满一个长度等于 1 的闭区间. 这一点在直觉上是很难想象的。

我们不难见到 $g: D \to [0,1]$ 不是一对一的。事实上任何一个满的映射 $g': D \to [0,1]$ 不可能是一对一的。否则的话，我们可用 (4.14) 知道 g' 是一个同胚。这是不可能的，原因是 D 不是连通的，可是 $[0, 1]$ 是连通的。

由 (5.2) 我们得到：

(5.3) 令

$$g: D \longrightarrow [0,1]^n$$

的定义为

$$g\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\right)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{kn-n+1}}{2^{k+1}},\cdots,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{kn}}{2^{k+1}}\right).$$

则 g 是一个满的映射。

(5.4) 存在一个满的映射。

$$h:[0,1]\longrightarrow[0,1]^n.$$

证明：令 $g:D\longrightarrow[0,1]^n$ 为 (5.3) 中的映射。作 D 时我们知道 $D=x_0\cap x_1\cap x_2\cap\cdots$，又对任何 $i=0,1,2,\cdots$，$x_i\supset x_{i+1}$ 而且 x_i-x_{i+1} 包含 2^i 个开区间，记作

$$(a_j,b_j),\quad j=2^i,2^i+1,\cdots,2^{i+1}-1.$$

再者，D 是 $\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots\}$ 的闭包。于是我们可以作一个映射 $h:[0,1]\to[0,1]^n$ 如下：若 $x\in D$，则

$$h(x)=g(x);$$

若 $x\in(a_j,b_j),j=1,2,\cdots$，则 $x=(1-t)a_j+tb_j,t\in(0,1)$。于是我们令

$$h(x)=(1-t)h(a_j)+th(b_j).$$

因为 $h(D)=g(D)=[0,1]^n$，所以 h 是满的。

h 是一个由闭区间 $[0,1]$ 到 n 维正方体 $[0,1]^n$ 的映射，而且是满的。这一点在直觉上是很难想象的。

(5.5) 存在一个满的映射

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^n.$$

证明 (5.5) 须用**可数无穷**的概念及一些有关的结果。在这里我们只能够说一个大概。读者若想对可数无穷多了解些，请参阅附录。

我们可以将 $\boldsymbol{R}$ 剖分作无穷个长度等于 1 的闭区间

$$\cdots,[-2,-1],[-1,0],[0,1],[1,2],\cdots$$

这些闭区间与整数之间有一个一一对应，使闭区间 $[k,k+$

1] 的对应整数是 k .

若 $I_1,\cdots,I_n$ 是任何 n 个这种闭区间，不一定相互不同，则

$$I_1\times\cdots\times I_n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_1\in I_1,\cdots,x_n\in I_n\}$$

是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个边长等于 1 的 n 维正方体，这些 n 维正方体的并集是 $\boldsymbol{R}^n$. 利用可数无穷的概念，我们能够证明这些 n 维正方体与整数之间有一个一一对应。如果将与整数 k 对应的 n 维正方体记作 C_k^n，则这些 n 维正方体是

$$\cdots,C_{-2}^n,C_{-1}^n,C_0^n,C_1^n,C_2^n,\cdots.$$

现在我们开始作所求的映射 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^n$.

对任何一个整数 k，唯一存在一点

$$a_k\in C_k^n$$

使

$$C_k^n=\{a_k+x|x\in[0,1]^n\}.$$

令

$$f:[k,k+1/2]\longrightarrow C_k^n$$

的定义为

$$f(x)=h(2x-2k)+a_k,$$

其中 h 是（5.4）中的映射。于是我们得到一个满的映射

$$f:\ \bigcup_{k=-\infty}^{\infty}[k,k+1/2]\to\boldsymbol{R}^n.$$

因此我们有一个满的映射

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^n$$

使对任何整数 k 及任何 $t\in(0,1)$,

$$f((1-t)(k+1/2)+t(k+1))$$
$$=(1-t)f(k+1/2)+tf(k+1).$$

§6 维数是一个拓扑概念吗

在第2节中，我们用线性的性质来定义维数。若 $a_0, \cdots, a_m \in \boldsymbol{R}^n$ 是独立的，就是说对任何 $r_0, \cdots, r_m \in \boldsymbol{R}$，

$$r_0 + \cdots + r_m = 0,\ r_0 a_0 + \cdots + r_m a_m = \theta$$
$$\Longrightarrow r_0 = \cdots = r_m = 0,$$

则

$$\{r_0 a_0 + \cdots + r_m a_m \mid r_0, \cdots, r_m \in \boldsymbol{R}, r_0 + \cdots + r_m = 1\}$$

是一个唯一的 m 维平面，通过 $a_0, \cdots, a_m$ 等 $m+1$ 个点。因为线性的性质不是一个拓扑概念，我们不能够用这个定义来决定，维数是不是一个拓扑概念。在(5.5)中我们知道存在一个由 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的满的映射。于是我们不得不考虑对两个不同的自然数 n 与 n'，是否可能存在一个由 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^{n'}$ 的同胚。如果存在一个由 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^{n'}$ 的同胚，则维数就不是一个拓扑概念了。

事实上维数是一个拓扑概念，只是证明起来很不容易。在这里我们要提到一本书，即胡列维茨（Hurewicz）和凡尔门（Wallman）合著的维数论。用不同的拓扑观点，对维数作详尽的讨论。的确是一本杰出的数学课本。不过这本书要求读者具有现代数学的知识，对象只是读数学专业的高年级本科生和研究生。对大多数我们的读者，帮不上什么忙。

在这一节中我们选一个比较容易懂的方法，来说明如何用拓扑的观点，来说明维数的概念，也说明为什么维数是一个拓扑概念。在这里我们要提醒读者，我们只在说明，不要求严格，更谈不到证明。

已给 $X \subset \boldsymbol{R}^n$，若 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{V}$ 是 X 的开覆盖，使对任何 $V \in$

$\mathscr{V}$，存在一个 $U\in\mathscr{U}$，满足 $V\subset U$，我们称 $\mathscr{V}$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个加细覆盖。

如果 X 有下面两条性质，我们说 x 的覆盖维数等于 m。

(i) X 的任何一个开覆盖 $\mathscr{U}$ 有一个加细覆盖 $\mathscr{V}$，使对任何相互不同的 $m+2$ 个 V_1，…，$V_{m+2}\in\mathscr{V}$，$V_1\cap\cdots\cap V_{m+2}=\varnothing$。

(ii) X 有一个开覆盖 $\mathscr{U}$，使对 $\mathscr{U}$ 的任何一个加细覆盖 $\mathscr{V}$，存在相互不同的 $m+1$ 个 V_1，…，$V_{m+1}\in\mathscr{V}$，满足

$$V_1\cap\cdots\cap V_{m+1}\neq\varnothing。$$

很明显地，覆盖维数是一个拓扑概念。

(6.1) $\boldsymbol{R}^n$ 中的 m 维平面的覆盖维数等于 m。

由 (6.1)，我们知道维数是一个拓扑概念。(6.1) 的证明相当困难，在下面我们说明 $n=2$ 的情形，$n=1$ 的情形比较简单，读者不妨自己去试试。

对 $\boldsymbol{R}^2$ 现在我们用极坐标。若 $\boldsymbol{R}^2$ 上一点 P 的极坐标是 (r,θ)，那么极点 O 到点 P 的距离等于 r，而且极轴 $\overrightarrow{OA}$ 到 $\overrightarrow{OP}$ 的角度等于 θ。

已给 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个开覆盖 $\mathscr{U}$，我们希望作一个 $\mathscr{U}$ 的加细覆盖 $\mathscr{V}$，使对任何相互不同的 $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathscr{V}$，$V_1\cap V_2\cap V_3\cap V_4=\varnothing$。

图 2.2

先找 $s_0'>0$ 使开集

$$\{(r,\theta)\mid r<s_0',\theta\text{ 任意}\}$$

包含在某一个 $U\in\mathscr{U}$ 之中，其次找 $s_1'>s_0'>s_1>0$ 及一个正整数 t_1 使对任何 $j=1$，…，$2t_1$，开集

$$\{(r,\theta)\mid s_1<r<s_1',(j-1)\pi/t_1<\theta<(j+1)\pi/t\}$$

包含在某一个 $U\in\mathscr{U}$ 之中，再其次找 $s_2'>s_1'>s_2>s_1$ 及一个 t_1 的倍数 t_2，使对任何 $j=1$，…，$2t_2$，开集

$$\{(r,\theta)\mid s_2 < r < s_2', (2j-1)\pi/2t_2 < \theta < (2j+3)\pi/2t_2\}$$

包含在某一个$U\in\mathscr{U}$之中。一般而论，我们可以找到

$$0 < s_1 < s_0' < s_2 < s_1' < s_3 < s_2' < \cdots$$
$$< s_{k-1} < s_{k-2}' < s_k < s_{k-1}' < s_{k+1} < s_k' < \cdots$$

及正整数

$$t_1,\ t_2,\ \cdots$$

使满足下面的条件。

1. 当k无限增大时，s_k亦无限增大。

2. t_{k+1}是t_k的倍数。

3. 若k是奇数时，则对任何$j=1$，…，$2t_k$，开集

$$\{(r,\theta)\mid s_k < r < s_k', (j-1)\pi/t_k < \theta < (j+1)\pi/t_k\}$$

包含在某一个$U\in\mathscr{U}$之中；若k是偶数时，则对任何$j=1$，…，$2t_k$，开集

$$\{(r,\theta)\mid s_k < r < s_k', (2j-1)\pi/2t_k < \theta < (2j+3)\pi/2t_k\}$$

包含在某一个$U\in\mathscr{U}$之中。

这些作出的开集的全体构成一个$\mathscr{U}$的加细覆盖$\mathscr{V}$。我们不难见到对任何相互不同的V_1，V_2，V_3，$V_4\in\mathscr{V}$，$V_1\cap V_2\cap V_3\cap V_4=\varnothing$。再者，我们能够证明对任何一个$\mathscr{V}$的加细覆盖$\mathscr{W}$，存在3个相互不同的$W_1$，$W_2$，$W_3\in\mathscr{W}$，使$W_1\cap W_2\cap W_3\neq\varnothing$。所以$\mathbf{R}^2$的覆盖维数等于2。

第三章　拓扑流形

§7　n 维拓扑流形

令

$R^n = n$ 维欧氏空间

$$H^n = \{x \in R^n \mid x_n \geqq 0\}.$$

已给$\varnothing \neq M \subset R^N$．若任何 $x \in M$ 有一个邻域 U，（就是说 U 是 M 中的一个开集，满足 $x \in M$，）同胚于 R^n 或 H^n，我们称 M 为一个 **n 维拓扑流形**，简称 **n 维流形**。我们之所以能够有 n 维拓扑流形的概念，是因为维数是一个拓扑概念。这说明了上一节的重要性。

（7.1）例子。

（1）(a, b)，$[a, b)$，$(a, b]$，$[a, b]$ 是 1 维流形。

（2）R^n，H^n 是 n 维流形。

（3）n 维单位球面 $S^n = \{x \in R^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ 是一个 n 维流形。

(4) **开 n 维单位球体** $B^n=\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\|<1\}$ $(=B^n(\theta,1))$ 和**闭 n 维单位球体** $D^n=\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\|\leq 1\}$ $(=\overline{B^n})$ 是 n 维流形。

(5) 若 M 是一个 n 维流形，而且 M' 是 M 中一个不等于 $\varnothing$ 的开集，则 M' 是一个 n 维流形。

(7.2) 对任何一个 n 维流形 M，M 的**边缘**

$$\partial M$$

是 M 的一个子集，使对任何 $x\in M$，

$$x\in \partial M \Longleftrightarrow x \text{ 在 } M \text{ 中的任何一个邻域与 } \boldsymbol{R}^n \text{ 不同胚。}$$

则 ∂M 或是 $\varnothing$ 或是一个 $n-1$ 维流形。若 $\partial M=\varnothing$，我们称 M 为一个**无边缘 n 维流形**，再者，若 $\partial M\neq\varnothing$，则 ∂M 是一个无边缘 $n-1$ 维流形，即 $\partial(\partial M)=\varnothing$ 。

证明(7.2)并不容易，在这里难对读者说得更清楚些。不过我们仍旧希望读者利用(7.1)中所给的例子，去体会一个 n 维流形的边缘。在这些例子中，除无边缘流形外，其他流形的边缘是如下：

$\partial[a,b)=\{a\}$，就是说 $\partial[a,b)$ 中只有一点 a，

$$\partial(a,b]=\{b\},$$

$$\partial[a,b]=\{a,b\}=\{a\}\cup\{b\},$$

$$\partial H^n=\{x\in H^n \mid x_n=0\},$$

$$\partial D^n=S^{n-1},$$

$$\partial M'=M'\cap\partial M .$$

(7.3) 若 M 是一个 n 维流形，M' 是一个 n' 维流形，则 $M\times M'$ 是一个 $n+n'$ 维流形，而且

$$\partial(M\times M')=\partial M\times M'\cup M\times\partial M' .$$

如果 M 和 M' 是 (7.1) 中所给的流形，我们容易见到 (7.3) 是成立的。希望读者能够利用这个启示，去给 (7.3) 一

个证明。

(7.4) 已给一个 n 维流形 M。对任何 $a\in M$，令

$$M_a=\{x\in M \mid \text{存在一个映射 } \alpha:[0,1]\to M, \text{使 } \alpha(0)=a,\alpha(1)=x\}.$$

则每一个 M_a 是 M 中的一个开集，于是亦是一个 n 维流形。再者，对任何 a，$b\in M$，

$$b\in M_a \Longleftrightarrow M_a=M_b \Longleftrightarrow a\in M_b.$$

证明：假设 $b\in M_a$。则存在一个映射

$$\alpha:[0,1]\longrightarrow M,$$

使 $\alpha(0)=a,\alpha(1)=b$。因为 M 是一个 n 维流形，存在一个 b 在 M 中的邻域 U，同胚于 R^n 或 H^n。于是对任何 $x\in U$，存在一个映射

$$\beta:[0,1]\longrightarrow U$$

使 $\beta(0)=b,\beta(1)=x$。因此我们有一个映射

$$\gamma:[0,1]\longrightarrow M,$$

它的定义是

$$\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\leq t\leq 1/2,\\ \beta(2t-1), & 1/2\leq t\leq 1.\end{cases}$$

因为 $\gamma(0)=a,\gamma(1)=x$，所以 $x\in M_a$。这证明了 $U\subset M_a$。

由这结果我们知道对任何 $b\in M_a$，M_a 包含一个 b 在 M 中的邻域。所以 M_a 是 M 中的一个开集。

对任何 $x\in M_b$，存在一个映射

$$\beta:[0,1]\longrightarrow M,$$

使 $\beta(0)=b,\beta(1)=x$。同样地，我们有一个映射

$$\gamma:[0,1]\longrightarrow M,$$

使 $\gamma(0)=a,\gamma(1)=x$，于是 $x\in M_a$。这证明了 $M_b\subset M_a$。

令

$$\alpha' : [0,1] \longrightarrow M$$

的定义为

$$\alpha'(t) = \alpha(1-t) .$$

则 α' 是一个映射满足 $\alpha'(0) = b, \alpha'(1) = a$ 。于是 $a \in M_b$ 。因此由上面结果知道 $M_a \subset M_b$，这证明了

$$M_a = M_b .$$

(7.5) 已给一个 n 维流形 M 。则对任何 $a \in M$，在 (7.4) 中所作的 M_a 是 M 中一个最大的连通子集，称作 M 的一个**连通分支**。

证明：由 (4.11)，我们知道 M_a 是 M 的一个连通子集。

假设 X 是 M 的一个连通子集，满足 $a \in X$ 。由(7.4)，我们知道 M_a 与 $M - M_a = \bigcup_{b \in M - M_a} M_b$ 是 M 中的两个开集，它们的交集是$\varnothing$。于是 $X \cap M_a$ 与 $X - M_a$ 是 X 中的两个开集，它们的交集亦是$\varnothing$，因为 $X \cap M_a \neq \varnothing$，而且 X 是连通的，所以 $X - M_a = \varnothing$ 或 $X \subset M_a$ 。这证明了 M_a 是 M 中一个最大的连通子集。

(7.6) 任何一个 n 维流形 M 是由可数个连通 n 维流形所构成。在这些连通 n 维流形中，每一个是 M 中的开集，而且任何不同两个的交集是$\varnothing$。

证明：关于可数个的概念及讨论，请读者参阅附录。

由(7.5)，我们知道 M 是由它的连通分支所构成，每一个连通分支是 M 中的一个开集，于是是一个连通 n 维流形。再者，任何两个连通分支的交集是$\varnothing$。

假设 $M \subset R^N$ 。我们能够对 M 的每一个连通分支 M' 作一个 R^N 中的开集 U，使

$$U \cap M = M' .$$

同时使这些开集 U 相互之间的交集是$\varnothing$。所以我们只有可数个 U，于是只有可数个 M'。

§8 1维流形

由(7.6)，我们知道任何一个1维流形是由可数个连通1维流形构成的。所以只要知道一般性的连通1维流形，就知道一般性的1维流形。

我们已经知道

$$\mathbf{R},\ S^1,\ [0,\ \infty),\ [0,\ 1]$$

是连通1维流形，其中$\mathbf{R}$和S^1是无边缘的，但$[0,\ \infty)$和$[0,\ 1]$则不是；又S^1和$[0,\ 1]$是紧的，但$\mathbf{R}$和$[0,\ \infty)$则不是。所以这四个1维流形相互之间不同胚。在这一节中，我们要证明任何一个连通1维流形同胚于这四个中的一个。

(8.1) 任何一个紧的无边缘的连通1维流形与S^1同胚。

证明：已给一个紧的无边缘的连通1维流形M。则任何$x\in M$有一个邻域U，使U同胚于$(0,\ 1)$，而且$\bar{U}$同胚于$[0,\ 1]$。

因为M是紧的，所以存在有限个这种邻域

$$U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_r$$

使它们的并集等于M。在这里我们不妨假定这r个邻域中的任何一个是不可以或缺的，这就是说少了r个中任何的一个，它们的并集就不等于M了。

令

$$\bar{U}_i-U_i=\{a_i,\ b_i\},\ i=1,\ \cdots,\ r,$$

则b_1是$U_2\cup\cdots\cup U_r$中一个点，于是我们不妨假定$b_1\in U_2$。因为$b_1\in\bar{U}_1-U_1$，而且U_2是b_1在M中的一个邻域，由(4.5)我们知道$U_1\cap U_2\neq\varnothing$。

假设 C 是 $U_1\cap U_2$ 的一个连通分支（见(7.5)），则

$$\overline{C}-C=\{c,d\}.$$

因为 $U_2\cup\cdots\cup U_r\neq M$，$U_1$ 只包含 c 与 d 两点中的一个点，而且另一点包含在 U_2 中。于是我们不妨假设

$$c\in U_1,\ d\in U_2.$$

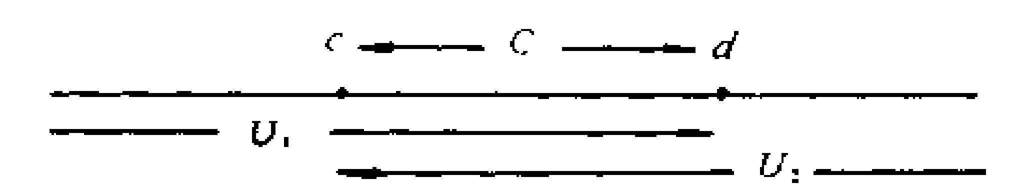


图 3.1

若 $U_1\cap U_2$ 中只有一个连通分支 C，我们不妨假定

$$c=a_2,\ d=b_1.$$

于是 $U_1\cup U_2$ 与 (0，1) 同胚。如图 3.2 所示，$U_1\cap U_2$ 中可能有两个连通分支。

在这情形下，$r=2$ 而且 $M=U_1\cup U_2$ 与 S^1 同胚。

再者，我们不难见到 $U_1\cap U_2$ 中不可能有两个以上连通分支。

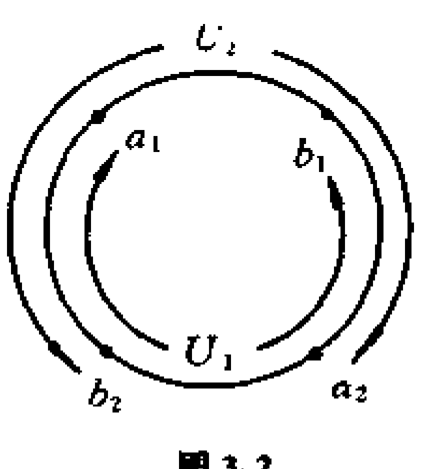


图 3.2

一般来说，我们不妨假定

$U_1\cap U_2\neq\varnothing$，$U_2\cap U_3\neq\varnothing$，…，$U_{r-1}\cap U_r\neq\varnothing$。于是对任何 $k=1,\cdots,r-1$，$(U_1\cup\cdots\cup U_{k-1})\cap U_k$ 中只有一个连通分支，而且 $U_1\cup\cdots\cup U_k$ 与 (0，1) 同胚。因为 M 是紧的，$(U_1\cup\cdots\cup U_{r-1})\cap U_r$ 中有两个连通分支，于是 $M=U_1\cup\cdots\cup U_r$ 与 S^1 同胚。

(8.2)　任何一个紧的有边缘的连通 1 维流形与 $[0, 1]$ 同胚。

证明：这个证明与 (8.1) 的证明大同小异。已给一个紧的有边缘的连通 1 维流形 M。对任何 $x \in \partial M$，x 在 M 中有一个邻域 U 同胚于 $[0, 1)$ 而且 $\overline{U}$ 同胚于 $[0, 1]$，对任何 $x \in M - \partial M$，x 在 M 中有一个邻域 U 同胚于 $(0, 1)$，而且 $\overline{U}$ 同胚于 $[0, 1]$。因为 M 是紧的，所以存在有限个这种邻域

$$U_1, U_2, \cdots, U_r$$

使它们的并集等于 M。因为 $\partial M \neq \varnothing$，我们不妨假定 U_1 同胚于 $[0, 1)$。如在 (8.1) 证明中一样，我们还可以假定这 r 个邻域中的任何一个是不可以或缺的，而且

$$U_1 \cap U_2 \neq \varnothing, \ U_2 \cap U_3 \neq \varnothing, \ \cdots, \ U_{r-1} \cap U_r \neq \varnothing.$$

因为 M 是连通的，我们不难见到 $U_2, \cdots, U_{r-1}$ 同胚于 $(0, 1)$，而且对任何 $k=2, \cdots, r-1$，$U_1 \cup \cdots \cup U_k$ 同胚于 $[0, 1)$。因为 M 是紧的，所以 U_r 同胚于 $[0, 1)$，而且 $M = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ 同胚于 $[0, 1]$。

(8.3)　若 M 是一个非紧的无边缘的连通 1 维流形，而且 $\alpha: [0,1] \to M$ 是一个映射，则 $\alpha([0, 1])$ 或是一个点或与 $[0, 1]$ 同胚。

证明：由 (4.13) (i)，我们知道 $[0, 1]$ 是紧的。于是由 (4.14) 的 (2)，我们知道 $\alpha([0,1])$ 亦是紧的。

每一个 $x \in \alpha([0,1])$ 有一个在 M 中的邻域 U 同胚于 $(0, 1)$。因为 $\alpha([0,1])$ 是紧的，于是存在有限个这种邻域 $U_1, \cdots, U_r$，使 $\alpha([0,1]) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$。如在 (8.1) 的证明中一样，我们不妨假定对任何 $k=1, \cdots, r-1$，$(U_1 \cup \cdots \cup U_k) \cap U_{k+1}$ 中只有一个连通分支。于是 $U_1 \cup \cdots \cup U_r$ 同胚于 $(0, 1)$ 或 S^1。因为 M 是一个非紧的无边缘的连通 1 维流形，其中不可能有一

个开集同胚于 S^1。所以 $U_1\cup\cdots\cup U_r$ 同胚于（0，1）或 $\boldsymbol{R}$。

令 $f: U_1\cup\cdots\cup U_r\to\boldsymbol{R}$ 为一个同胚。利用实数的性质 $\boldsymbol{R}16$，我们知道 $f\alpha$（[0，1]）中有一个最小的实数 a 和一个最大的实数 b，$a\leq b$。因为 $f\alpha([0,1])$ 是连通的。所以 $f\alpha([0,1])=[a,b]$。

（8.4）若 M 是一个非紧的无边缘的连通 1 维流形，而且 $a\in M$，则 $M-\{a\}$ 只有两个连通分支 C_1 与 C_2，而且 $\bar{C}_1$ 与 $\bar{C}_2$ 是非紧的有边缘的连通 1 维流形，同胚于 $[0,\infty)$，而且

$$\bar{C}_1\cap\bar{C}_2=\partial\bar{C}_1=\partial\bar{C}_2=\{a\}.$$

证明：a 在 M 中有一个邻域 U 同胚于 $\boldsymbol{R}$。令 $f:\boldsymbol{R}\to U$ 为一个同胚使 $f(0)=a$。则在 $M-\{a\}$ 中有一个连通分支 C_1 使 $f(1)\in C_1$。于是 C_1 是一个非紧的无边缘的连通 1 维流形，而且 $a\in\bar{C}_1$。

C_1 不包含 $f(-1)$。不然的话，则存在一个映射 $\alpha:[0,1]\to C_1\subset M-\{a\}$，使 $\alpha(0)=f(1)$，$\alpha(1)=f(-1)$。由(8.3)，我们知道 $\alpha([0,1])$ 同胚于[0,1]。于是 $\alpha([0,1])\cup U$ 同胚于 S^1，这是不可能的。

令 C_2 为 $M-\{a\}$ 中包含 $f(-1)$ 的连通分支。同样地，C_2 是一个非紧的无边缘的连通 1 维流形，而且 $a\in\bar{C}_2$。

$M-\{a\}$ 不可能有第三个连通分支 C_3，不然的话，$a\in\bar{C}_3$，于是 $C_3\cap U\neq\varnothing$。所以（8.4）成立。

（8.5） 若 M 是一个非紧的无边缘的连通 1 维流形，而且 a 与 b 是 M 上两个不同点，则 $M-\{a,b\}$ 有 3 个连通分支 C_1，C_2 与 C_3，使

$$\bar{C}_1=C_1\cup\{a\},\bar{C}_2=C_2\cup\{a,b\},\bar{C}_3=C_3\cup\{b\}.$$

其中 $\bar{C}_1$ 与 $\bar{C}_3$ 不是紧的，但 C_2 是紧的。

证明：由（8.4），我们知道 $M-\{a\}$ 有两个连通分支 C_1 与

C_1，使 $b\in C_1$。因为 C_1 亦是一个非紧的无边缘的连通 1 维流形，$C_1-\{b\}$ 有两个连通分支 C_2 与 C_3。因为

$$a\in\overline{C}_1=\overline{C}_2\cup\overline{C}_3,\quad a\notin\overline{C}_2\cap\overline{C}_3,$$

我们不妨假设 $a\in\overline{C}_2$，于是 (8.5) 成立。

(8.6)　若 M 是一个非紧的有边缘的连通 1 维流形，而且 ∂M 中只有一点 a_0，则 M 与 $[0,\infty)$ 同胚。

证明：假设 $M\subset \boldsymbol{R}^N$。因为 $\boldsymbol{R}^N$ 同胚于 $B^N=\{x\in\boldsymbol{R}^N\mid \|x\|<1\}$，我们不妨假设

$$M\subset B^N.$$

因为 M 不是紧的，由 (4.13) 我们知道 M 不是 $\boldsymbol{R}^N$ 中的一个闭集。于是 M 在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的闭包 $\overline{M}$ 中有一点 a 不属于 M。令 $\{a_k\}_{k\in N}$ 为 M 中一个点列，使 $\lim a_k=a$。

由(8.3)，我们知道对任何 $k\in N$，$M-\{a_k\}$ 有两个连通分支 C_k 与 C_k'，使 $a_0\in C_k$。于是 $\overline{C}_k=C_k\cup\{a_k\}$ 是一个紧的有边缘的连通 1 维流形。由 (8.2)，我们知道 $\overline{C}_k$ 与 $[0,1]$ 同胚。

因为 $\{a_k\}_{k\in N}$ 可以用它的一个子点列来代替，我们不妨假定 $a_{k+1}\notin\overline{C}_k$，$k\in N$。于是 $M'=\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k$ 是 m 中的一个开集，而且 $a\in\overline{M'}$

再者，我们能够作一个同胚

$$\varphi:\ [0,\infty)\longrightarrow M',$$

使对任何 $k\in N$，$\varphi([0,k])=\overline{C}_k$。

若 $M'\neq M$，我们能够利用 M 的连通性质找到一点 $b\in M\cap\overline{M'}$。令 U 为 b 的一个邻域，同胚于 $(0,1)$。则 $U\cap M'$ 中只有一个连通分支，亦同胚于 $(0,1)$。于是 $M'\cup\{b\}\subset M$，而且同胚于 $[0,1]$，与 $a\in\overline{M'}-M$ 矛盾。

由(8.4)和(8.6)，我们得到

(8.7) 任何一个非紧的无边缘的连通 1 维流形与 $\boldsymbol{R}$ 同胚。

(8.8) 任何一个连通 1 维流形与

$$S^1,\ \boldsymbol{R},\ [0,\ \infty),\ [0,\ 1]$$

中的一个同胚。

证明：已给一个连通 1 维流形 M。若 M 是紧的，我们由(8.1)和(8.2)知道 M 同胚于 S^1 和 $[0,1]$ 中的一个。若 M 不是紧的，我们只要证明 ∂M 中至多有一个点，就可以由(8.6)和(8.7)知道 M 同胚于 $[0,\ \infty)$ 和 $\boldsymbol{R}$ 中的一个。

若 M 不是紧的，而且 ∂M 中有两个不同点 a 和 b，则

$$\{a\}\cup(M-\partial M),\{b\}\cup(M-\partial M)$$

是非紧的连通 1 维流形，而且它们的边缘中只包含一点。由(8.6)，我们知道它们与 $[0,\ \infty)$ 同胚；由(8.7)，我们知道它们的交集与 $\boldsymbol{R}$ 同胚。所以 M 与 $[0,1]$ 同胚，与 M 是非紧的假设矛盾。

利用(7.6)，我们现在能够在 $\boldsymbol{R}^2$ 作最一般的 1 维流形如下：

对任何 $k\in\boldsymbol{N}$，令 M_k 为

$$\{x\in\boldsymbol{R}^2\mid k-1<x_2<k\}$$

的一个子集，或是$\varnothing$，或是一个连通 1 维流形，同胚于 S^1，$\boldsymbol{R}$，$[0,\ \infty)$，$[0,\ 1]$ 中的一个。若

$$M=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k\neq\varnothing,$$

则 M 是一个 1 维流形，再者，任何一个 1 维流形必定同胚于这样作成的 M 中的一个。

§9 加强约当曲线定理

讨论了 1 维流形之后，很自然地我们希望继续讨论 2 维及高维的流形。再者，数学的发展是多方面的。对 2 维流形的了解有助于复函数黎曼曲面的研讨。对一般流形的了解亦有助于黎曼几何的研讨。

由 (8.5) 我们知道，若 M 是 $\boldsymbol{R}$ 中一个流形，同胚于 S^0，则 $\boldsymbol{R}-M$ 中只有一个有界的连通分支 C，而且 $\bar{C}$ 与 $D^1=\{x\in\boldsymbol{R}\mid|x|\leq1\}$同胚，所以我们自然地考虑到下面的两个问题。若 M 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个流形，同胚于 S^{n-1}，$n>1$，那么在 $\boldsymbol{R}^n-M$ 中是否只有一个有界的连通分支 C？如果有了 C，$\bar{C}$ 是否与 $D^n=\{x\in\boldsymbol{R}^n\mid\|x\|\leq1\}$ 同胚？

加强约当曲线定理就是对这两个问题在 $n=2$ 时给肯定的回答。这结果在讨论 2 维流形时是十分有用的。

若 M 是一个在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的 1 维流形，同胚于 S^1，我们称 M 为一条在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的**简单闭曲线**。

(9.1) **约当曲线定理** 若 M 是一条在 $\boldsymbol{R}^2$ 中的简单闭曲线，则 $\boldsymbol{R}^2-M$ 有两个连通分支，而且其中只有一个是有界的。

若 M 是一个圆，或一个三角形，或一个正多角形，(9.1) 是很明显的，而且 $\boldsymbol{R}^2-M$ 中有界的连通分支就是 M 的内部。

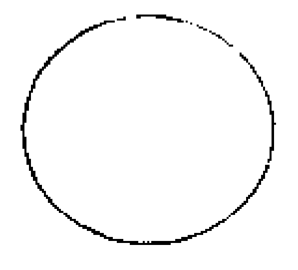
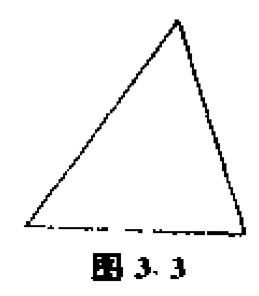
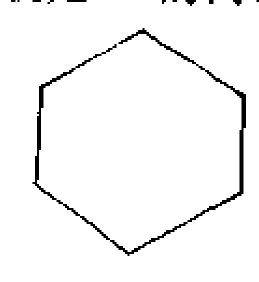




图 3.3

若 M 是图 3.4 的简单闭曲线，(9.1) 就不明显了。

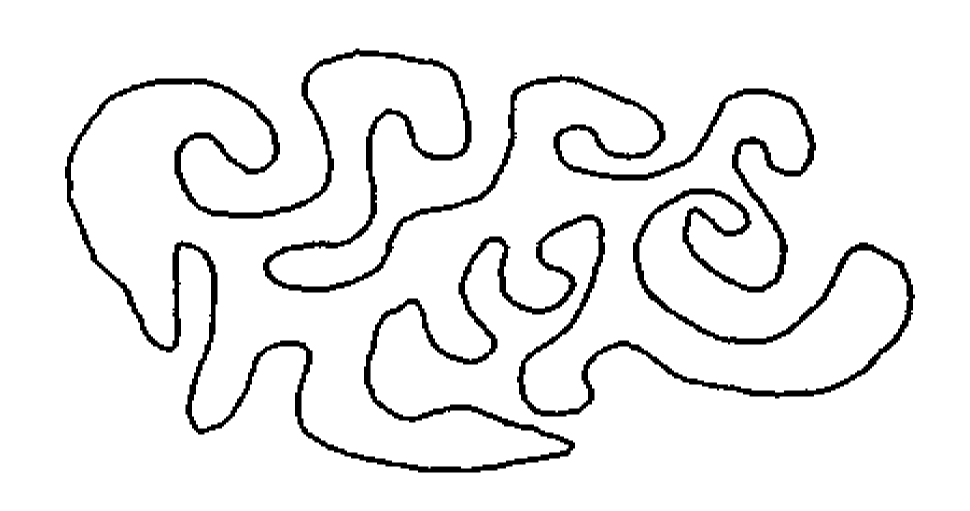


图 3.4

在 (9.1) 中我们只假设 M 与 S^1 同胚。尤其在读了第 5，6 两节之后，我们没有把握去想像 M 的形态。这是证明 (9.1) 的难处。在下面我们只对一个特殊情形给一个证明。

借这个机会我们再提醒读者们一声。在这本书中的证明多半是马马虎虎，不求严格。目的只是帮助读者了解所说的内容。从这里开始，能给证明的地方愈来愈少了。如 (9.1) 一样，我们尚能对一个特殊情形给证明，已经算不错了。在许多地方，我们根本没有办法谈证明，只好轻描淡写，说说算了。

我们要证明的 (9.1) 的特殊情形，是假设 M 由一个不规则的多角形的边所构成。因为 M 只包含有限条线段，于是存在一方向不平行其中任何一条，在这里我们不妨设这方向是水平方向。

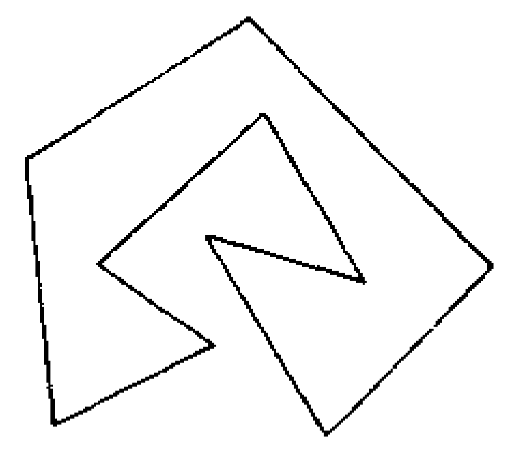


图 3.5

若 l 是一条水平直线，则 $l\cap M$ 可能是空集 $\varnothing$ 也可能包含有限个点

$$P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_r.$$

如果 P_k 不是多角形 M 的顶点，我们将 P_k 留下来。如果 P_k 是多角形 M 的一个顶点，而且包含 P_k 的两条边中一在 l 的上面另一在 l 的下面，我们仍将 P_k 留下来。如果 P_k 是多角形 M 的一个顶点，而且包含 P_k 的两条边都在 l 的上面或都在 l 的下面，我们则将 P_k 去掉。

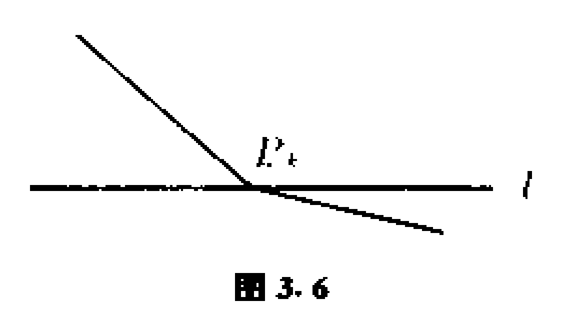


图 3.6

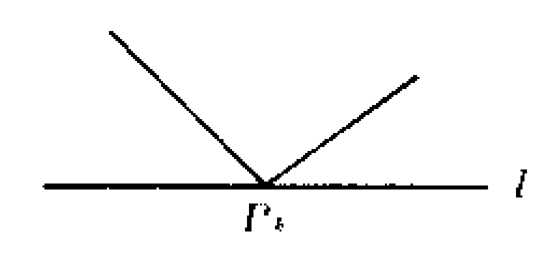


图 3.7

已给一个点 $P\in l-M$，若在 l 的左边有偶数个留下来的 P_k，我们称 P 为**偶点**。若在 l 的左边有奇数个留下来的 P_k，我们称 P 为**奇点**。令

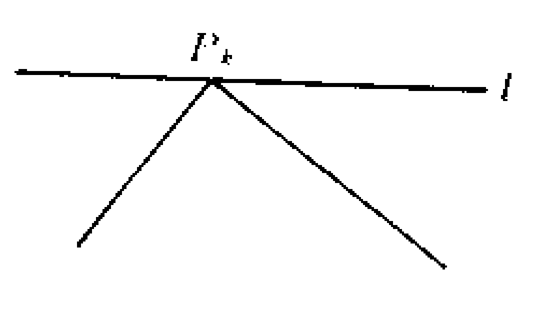


图 3.8

C_e = 所有偶点所构成的集，

C_0 = 所有奇点所构成的集，

则 C_e 与 C_0 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的开集，而且

$$C_e\cup C_0=\boldsymbol{R}^2-M,$$

$$C_e\cap C_0=\varnothing.$$

现在将 l 由下向上移动。因为 M 是有界的，所以当 l 在很低时 $l\cap M=\varnothing$，于是所有 l 上的点都是偶点。在移动时首先遇到 $l\cap M\neq\varnothing$ 的情形是 $l\cap M$ 只包含多角形的顶点。因为包含每一顶点的两条边都在 l 的上面，我们去掉所有这些顶点，于是

所有 $l-M$ 上的点都是偶点。再将 l 稍稍移上一点，则 $l\cap M$ 中的点没有一个是顶点，于是全部都留下来，个数是偶数。

一般来说，对一条水平直线 l，$l\cap M$ 中留下来的点的个数是偶数，当 l 由下向上移动时，只在 l 经过 M 的顶点时，对应的偶数才可能改变，而且增减的数亦是偶数。

在 M 的两旁各作一个类似的多角形 M' 与 M''，使包含在 $\mathbf{R}^2-M$ 中，而且很接近 M。若 M' 包含一个偶点，则

$$M'\subset C_e,\quad M''\subset C_0 .$$

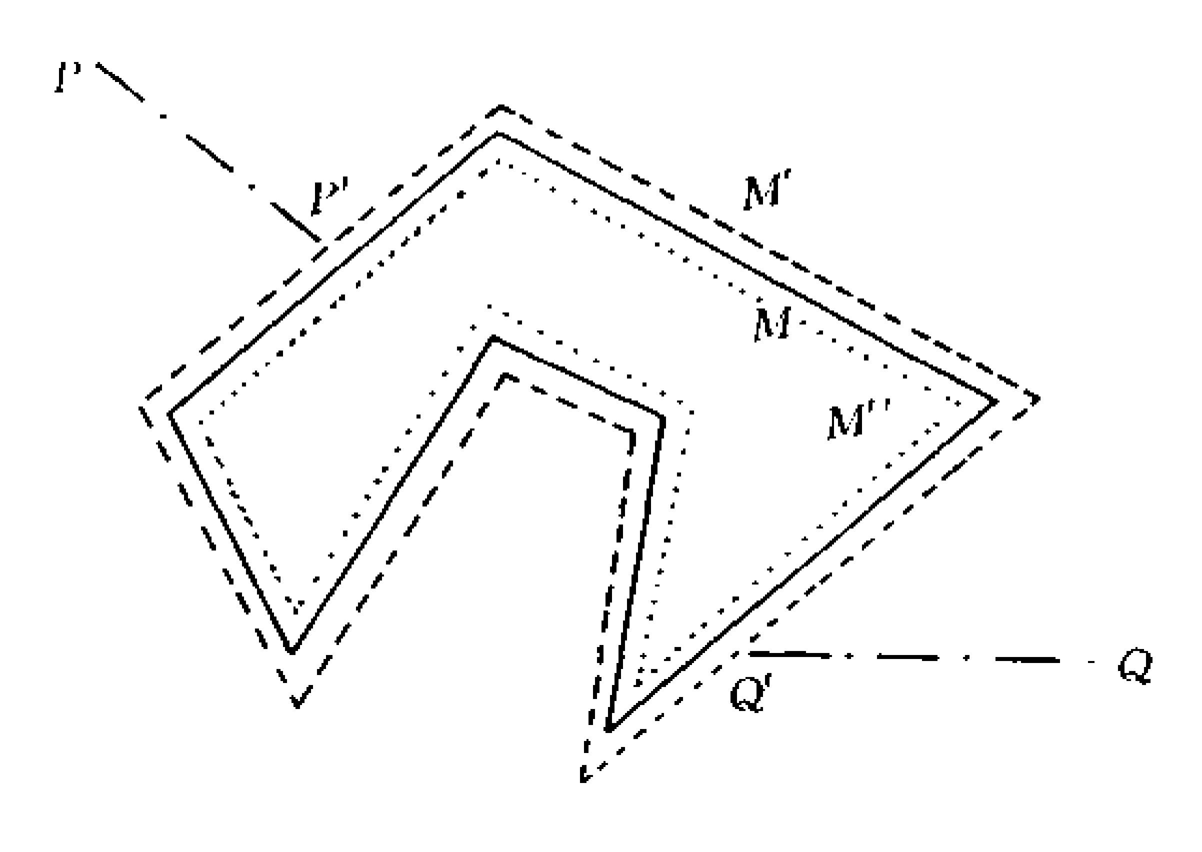


图 3.9

对任何 P，$Q\in C_e$，存在一条折线 $A\subset C_e$ 连接 P 与 Q。如图中所示，我们可令 A 由 M' 的一部分与两线段 $\overline{PP'}$ 及 $\overline{QQ'}$ 所构成，其中 P'，$Q'\in M'$。由这结果，我们知道 C_e 是连通的。同样地，C_0 亦是连通的。

再者，我们不难见到 C_0 是有界的，C_e 则不是。

(9.2)　若 M 是一条在 $\boldsymbol{R}^2$ 中的简单闭曲线，而且 C_e 与 C_0 分别为 $\boldsymbol{R}^2-M$ 中非有界的和有界的连通分支，则 $\overline{C}_0$ 同胚于 $D^2=\{x\in\boldsymbol{R}^2 \mid \|x\|\leq 1\}$，而且 $\overline{C}_e$ 同胚于 $D^2-\{\theta\}=\{x\in\boldsymbol{R}^2 \mid 0<\|x\|\leq 1\}$。

(9.2) 的证明比 (9.1) 的证明困难。即使在 M 为一多角形的假设下亦不容易。读者应该先想想 M 是一个三角形时应如何，再想想 M 是一个四角形时又如何。由此推导下去，才可能在 M 为一个多角形时，得到一个 (9.2) 的证明。

加强约当定理就是指将 (9.1) 和 (9.2) 结合在一起的结果。

现在回到当初提出的问题。已给一个在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的流形 M，同胚于 S^{n-1}，$n\geq 2$。我们问 $\boldsymbol{R}^n-M$ 中有多少个连通分支？其中有几个是有界的？如 (9.1) 一样，回答是如下：

(9.3)　若 M 是一个在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的流形，同胚于 S^{n-1}，$n\geq 2$，则 $\boldsymbol{R}^n-M$ 只有两个连通分支，而且其中只有一个是有界的。

证明 (9.3) 通常是用代数拓扑。代数拓扑是现代数学中一个非常重要的工具，非轻描淡写所能表达的。所以对 (9.3) 我们实在没有办法多谈。

若 C 是 $\boldsymbol{R}^n-M$ 中有界的连通分支，$n\geq 2$，我们问 $\overline{C}$ 是否与 $D^n=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid \|x\|\leq 1\}$ 同胚。(9.2) 说在 $n=2$ 时问题的回答是肯定的。所以我们自然地希望在 $n>2$ 时亦一样。令人惊讶的是在 $n=3$ 时，问题的回答是否定的。原因是在 $\boldsymbol{R}^3$ 中有一个出人意外的古怪球面，即著名的**亚力山大有角球面**。现在介绍如下：

令 $X_0=D^3=\{x\in\boldsymbol{R}^3 \mid \|x\|\leq 1\}$，则 $\partial X_0=S^2$。在 X_0 中作一对圆柱，使它们的一个底在 S^2 上，另一个底形成一对相对的

圆盘。将这对圆柱的内部（包括它们在 ∂X_0 上的底的内部）从 X_0 中挖掉，而将余下的部分记作 X_1，则 X_1 与 X_0 同胚，而且 ∂X_1 与 S^2 同胚。再者，在 ∂X_1 上有一对相对的圆盘。

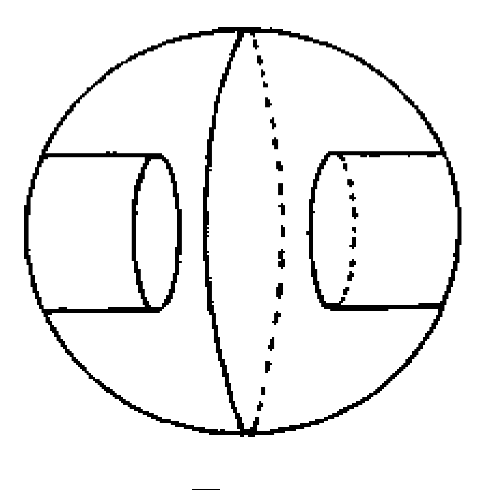


图 3.10

对每一圆盘，在 X_1 中作一对弯曲的圆柱，使它们的一个底在圆盘上，另一个底形成一对相对的圆盘。所以这样一对圆柱像是由圆盘上长出的一对角。在这里我们尚有一个很重要的要求，就是两对圆柱像一条链子中两个环的一部分，而且每一对相对圆盘中央的空间就是一个环两端之间的空隙（图 3.11）。

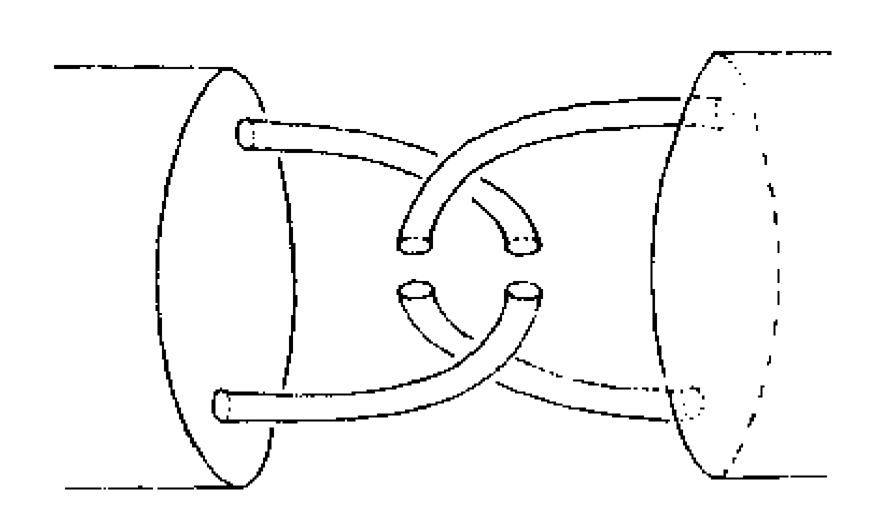


图 3.11

将这两对圆柱的内部（包括它们在 ∂X_1 上的底的内部）从 X_1 中挖掉，而将余下的部分记作 X_2。则 X_2 与 X_1 同胚，而且 ∂X_2 与 S^2 同胚。再者，在 ∂X_2 上有两对相对的圆盘。

对 ∂X_2 上每对相对的圆盘在 X_2 作同样事情，使得到 X_3。

如此继续作下去，我们有

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots,$$

使对每个 k，X_k 与 X_0 同胚，而且 ∂X_k 与 S^2 同胚。再者，在 ∂X_k 上有 2^{k-1}对相对的圆盘。我们可以使 k 无限增大时，∂X_k 上圆盘的面积接近 0，而且每对相对圆盘之间的空隙亦接近 0。

令

$$X = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k,$$

$$M = X \cap \overline{\mathbf{R}^3 - X}.$$

利用 ∂X_k 无限地接近 M，我们能够证明 M 与 S^2 同胚，而且 X 是 $\mathbf{R}^3-M$ 中有界连通分支的闭包。因为在 X 中有一个圆 C，不可能在 X 中缩小到一个点，X 不与 D^3 同胚。

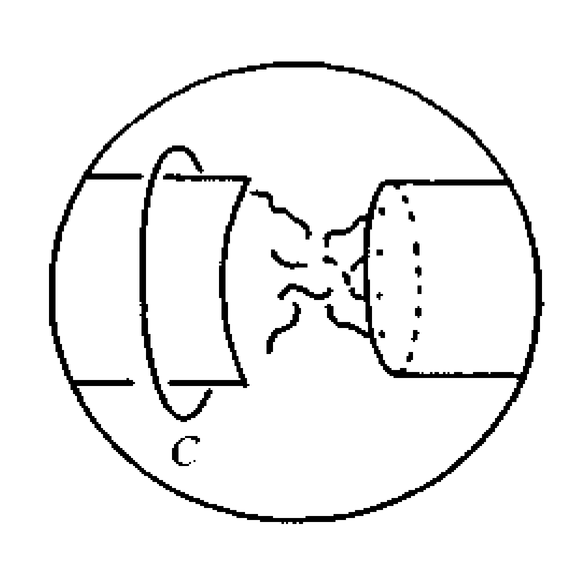


图 3.12

读者们，做数学必须配合直观的构想和逻辑的推导。直观的构想是做数学的原动力，没有它我们难能下手。但是没有逻辑的推导，我们不能够肯定直观的构想是对的。做数学的困难在此，做数学的趣味亦在此。如第 5 节中所作的由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的满的映射和这一节中所作的亚力山大有角球面，都很难在直观构想中出现。差之毫厘，失之千里。做数学的人必须注意。

n 维单位球面 S^n 与 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 之间有一个自然的关系。令 p 为 S^n 的北极（0，…，0，1），而且将 $\mathbf{R}^n$ 中每一点（x_1，…，x_n）看作 $\mathbf{R}^{n+1}$中的点（x_1，…，x_n，0）。于是有一个同胚

$$\varphi: S^n - \{p\} \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

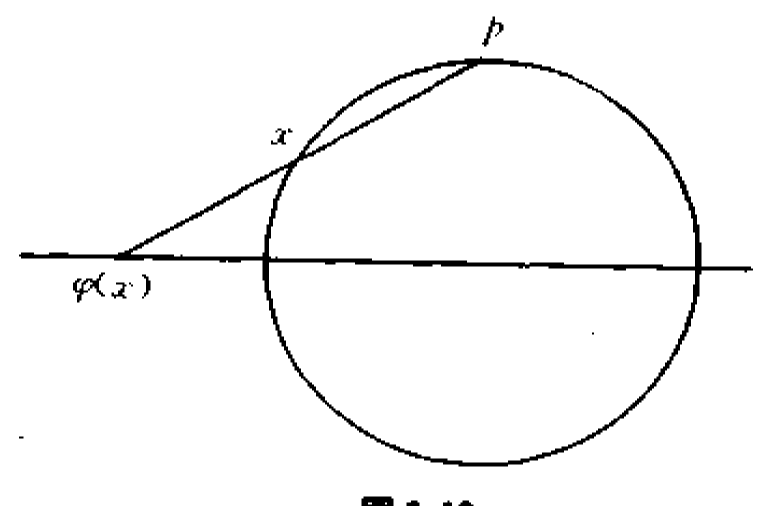


图 3.13

使对任何 $x \in S^n - \{x\}$，$\varphi(x)$ 是直线 px 与 $\mathbf{R}^n$ 的交点。我们称 φ 为**球极空间射影**。这里的图是指 $n=1$ 情形。

若 M 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一条简单闭曲线，则 $\varphi^{-1}(M)$ 是 S^2 中的一条简单闭曲线，不包含 p。所以我们能够利用球极空间射影得到

(9.4)　若 M 是一条在 S^2 中的简单闭曲线，则 S^2-M 中有两个连通分支，而且每个连通分支的闭包与 D^2 同胚。

同样地，我们有

(9.5)　若 M 是一个在 S^n 中的流形，同胚于 S^{n-1}，$n>2$，则 S^n-M 中有两个连通分支，但每一个连通分支的闭包不一定与 D^n 同胚。

针对(9.5)，我们能证明下面的结果。

(9.6)　若 f：$S^{n-1}\times[0,1]\to S^n$ 是一个拓扑嵌入，而且 $M=f(S^{n-1}\times\{1/2\})$，则 M 是一个在 S^n 中的流形，同胚于 S^{n-1}，而且 S^n-M 中每一个连通分支的闭包与 D^n 同胚。

§ 10 紧的可剖分空间与欧拉示性数

若 a_0，…，$a_k \in \boldsymbol{R}^N$ 是独立的（见第 2 节），我们称

$$\langle a_0,\cdots,a_k\rangle=\{\sum_{i=0}^{k} r_i a_i \mid r_0,\cdots,r_k \geqq 0,\sum_{i=0}^{k} r_i=1\}$$

为一个 k 维单形，它的顶点是 a_0，…，a_k．所以一个 0 维单形是一个点，它的顶点就是自己；一个 1 维单形是一条线段，它的顶点是线段的端点；一个 2 维单形是一个三角形，它的顶点是三角形的顶点；一个 3 维单形是一个四面体，它的顶点是四面体的顶点．

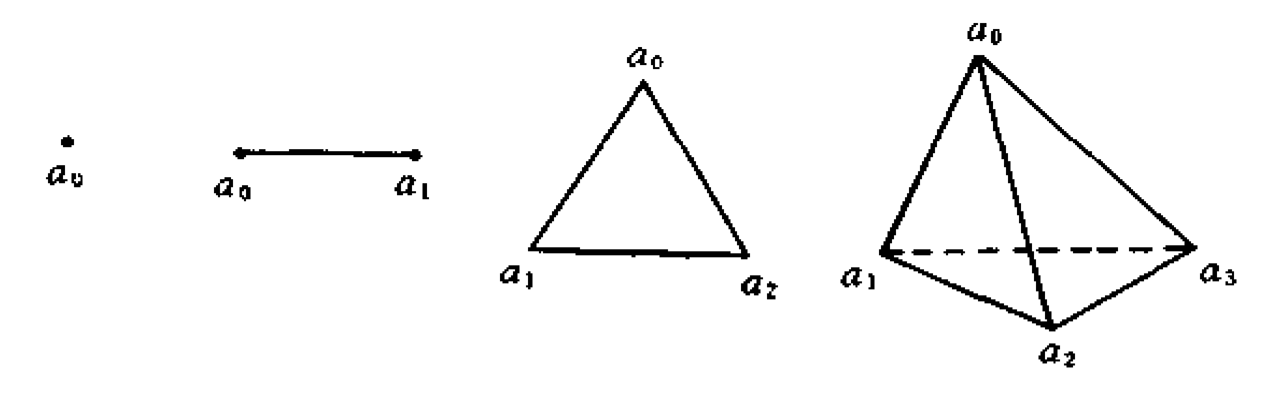


图 3.14

已给一个 k 维单形

$$\sigma=\langle a_0,\cdots,a_k\rangle .$$

对任何 $l+1$ 个整数 $0\leqq k_0<k_1<\cdots<k_l\leqq k$，我们有一个 l 维单形

$$\tau=\langle a_{k_0},\cdots,a_{k_l}\rangle,$$

称作一个 σ 的 l 维面．我们容易见到每一个 k 维单形有

$$\binom{k+1}{l+1}=\frac{(k+1)!}{(l+1)!(k-l)!}$$

个 l 维面，$l=0$，1，…，k，其中 $n!$ 是 1，2，…，n 的积。

一个在 R^N 中的**有限复形**是由有限个在 R^N 中的单形所构成的集 K，满足下面两个条件。

(i) 若 $\sigma\in K$，则 σ 的每一个面属于 K。

(ii) 若 σ_1，$\sigma_2\in K$，则 $\sigma_1\cap\sigma_2$ 或是 $\varnothing$ 或是 σ_1 与 σ_2 的一个公共面。

所以下面两个图形是 R^2 中的有限复形

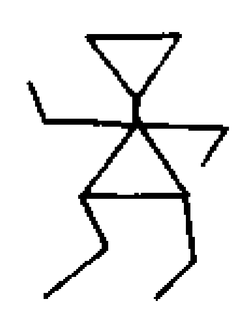


图 3.15

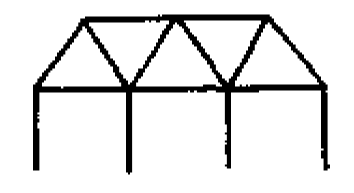


图 3.16

若 K 是 R^N 中一个有限复形。则

$$|K|=\bigcup_{\sigma\in K}\sigma$$

是 R^N 中一个紧的拓扑空间，称作一个在 R^N 中的**有限多面体**。已给一个在 R^N 中的紧的拓扑空间 X。若存在一个有限复形 K，使 X 与 $|K|$ 同胚，我们说 X 是**可剖分的**，而且 K 是 X 的一个**剖分**。

(10.1)　例子。

(1) S^n 是可剖分的。令 σ 为一个 $n+1$ 维单形，K 为 σ 中所有异于 σ 的面所构成的有限复形。则 S^n 与 $|K|$ 同胚。图 3.17 是指 $n=2$ 情形。

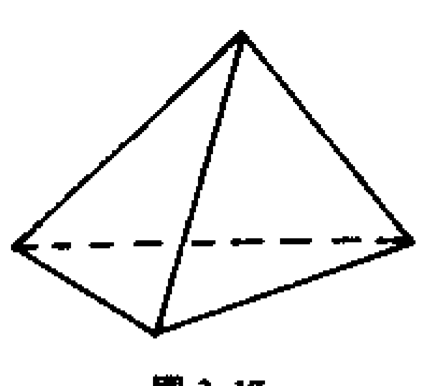


图 3.17

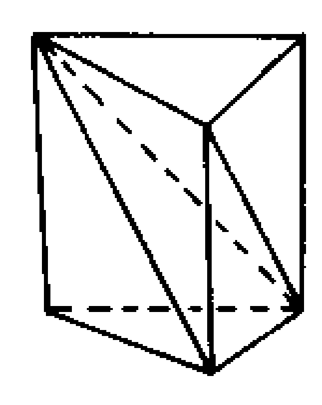


图 3.18

(2) 圆柱 $S^n\times[0,1]$ 的侧面是可剖分的。图 3.18 是指 $n=1$ 的情形。

(3) $X=\{(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2\mid x_1=0, x_2\in[-1,1]\}\cup\{(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2\mid x_1\in(0,4], x_2=\sin 1/x_1\}$ 不是可剖分的。

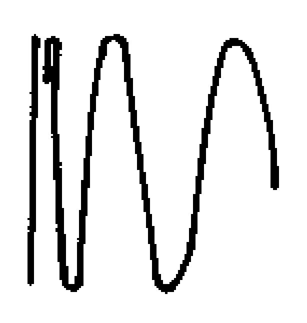


图 3.19

可剖分问题 是否每一个紧的无边缘的连通 n 维流形是可剖分的？

若 $n=1$，我们由 (8.1) 知道任何一个紧的无边缘的连通 1 维流形与 S^1 同胚，于是是可剖分的。

若 $n=2$，我们能够利用加强约当定理去证明每一个紧的无边缘的连通 2 维流形是可剖分的。虽然在这本书中我们没有方法去说明证明如何进行，但在第 12 节中我们将给出各种紧的无边缘的连通 2 维流形及它们的剖分。

若 $n=3$，我们亦能够证明任何一个紧的无边缘的连通 3 维流形是可剖分的。这是 50 年代中麻伊士 (Moise) 所得到的著名成果。因为在 $n=3$ 时我们没有一个定理相当于 $n=2$ 时的加强约当定理，证明的困难度可想而知。

可剖分问题在 70 年代中是一个主要拓扑科研问题，牵涉到

很高深的拓扑概念。一个主要的成果是存在一个紧的无边缘的连通 6 维流形，不是可剖分的。

为什么我们去考虑可剖分问题呢？一个原因是介绍欧拉示性数。现在说明如下：

若 K 是一个有限复形，我们将 K 中 k 维单形的个数记作 $e_k(K)$ 。因为 K 是有限的，于是存在一个 $k \in N$，使

$$e_k(K) = 0, \quad k > m .$$

令

$$\begin{aligned} e(K) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k e_k(K) \\ &= e_0(K) - e_1(K) + - \cdots + (-1)^m e_m(K), \end{aligned}$$

则 $e(K)$ 是一个整数，称作 K 的**欧拉示性数**。

(10.2)　已给一个紧的可剖分的拓扑空间 X 。若 K 是一个有限复形，使 $|K|$ 与 X 同胚，则 $e(K)$ 由 X 决定，与 K 的选择无关。换一句话来说，若 K' 是另一个有限复形，使 $|K'|$ 与 X 同胚，则 $e(K') = e(K)$ 。所以我们可以将 $e(K)$ 写作 $e(X)$，称为 X 的**欧拉示性数**

证明 (10.2) 通常要用到代数拓扑，不是我们能够说明的。

由 (10.2) 和 (10.1) 的 (1)，我们知道

$$e(S^n) = \begin{cases} 0 & 若\ n = 奇数, \\ 2 & 若\ n = 偶数. \end{cases}$$

若 X 与 D^n 同胚，则 X 的一个剖分是由一个 n 单形的所有的面所构成的有限复形，于是

$$e(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 1 .$$

其中

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

§ 11　切开和粘合

切开和粘合是几何学中两个简单基本的手法。我们先从一些例子说起。

考虑普通空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的单位球面

$$S^2=\{x\in \boldsymbol{R}^3 \mid \|x\|=1\}$$

及 S^2 上的赤道

$$S^1=\{x\in S^2 \mid x_3=0\}.$$

如果将 S^2 沿着 S^1 切开，我们则得到一个上半球

$$H_+^2=\{x\in S^2 \mid x_3\geqq 0\}$$

和一个下半球

$$H_-^2=\{x\in S^2 \mid x_3\leqq 0\}.$$

S^2 是一个紧的无边缘的 2 维流形，H_+^2 与 H_-^2 是紧的有边缘的 2 维流形，而且

$$\partial H_+^2=S^1=\partial H_-^2.$$

令

$$\lambda:\partial H_+^2\longrightarrow \partial H_-^2$$

为**恒等同胚**，就是说 λ 的定义是 $\lambda(x)=x$。如果将 ∂H_+^2 上每一点 x 与 ∂H_-^2 上的点 $\lambda(x)$ 相粘合，我们重新得到 S^2。于是我们写

$$S^2=H_+^2\cup_\lambda H_-^2,$$

而且说 S^2 是用 λ 将 H_+^2 与 H_-^2 粘合而得到的。

已给一个矩形 $ABCD$，看作一个 2 维流形，它的边缘由四条边所构成，见图 3.20。假设 λ：$\overline{AD}\longrightarrow\overline{BC}$ 是一个同胚，使

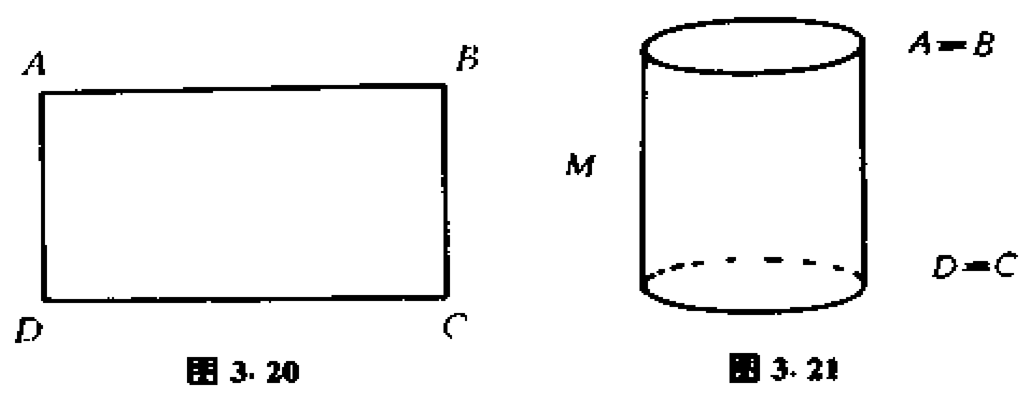


图 3.20　　　　图 3.21

$\lambda(A)=B, \lambda(D)=C$。如果将$\overline{AD}$上每一点 x 与$\overline{BC}$上的点 $\lambda(x)$ 相粘合，我们则得到一个 2 维流形 M，如图 3.21 的圆柱侧面，而且$\overline{AD}=\overline{BC}$是圆柱侧面上一条母线。我们说 M 是用 λ 将矩形的一对对边粘合所得到的。反过来，已给一个圆柱侧面 M 及 M 上一条母线、若将 M 沿着这条母线切开，我们重新得到一个（拓扑）矩形。

现在将 λ 换作另一个同胚 μ: $\overline{AD}\longrightarrow\overline{BC}$，使 $\mu(A)=C$，$\mu(D)=B$。用 μ 将矩形 $ABCD$ 的一对对边相粘合，我们亦得到一个 2 维流形 M'。M 与 M' 都是紧的有边缘的，但是相互不同。一个不同点是 ∂M 由两条简单闭曲线所构成，可是 $\partial M'$ 是一条简单闭曲线。再者，M 的面有内外之分，可是 M' 的面却没有。我们称 M' 为一个**麦比乌斯带**。

M 和 M' 都可以看作在 $\boldsymbol{R}^3$ 中的 2 维流形。在 $\boldsymbol{R}^3$ 中，

$$(x_1)^2+(x_2)^2=4, \qquad x_3=0$$

是一个圆，它上面的点可以写成

$$P_\theta=(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0), \theta\in[0,2\pi].$$

对任何 $\theta\in[0, 2\pi]$，令

$$L_\theta=\{(2\cos\theta, 2\sin\theta, r)\,|\,r\in[-1,1]\},$$

$$L'_\theta=\{((2+r\cos\theta/2)\cos\theta, (2+r\cos\theta/2)\sin\theta,$$

$r\sin\theta/2) \mid \quad r \in [-1,1]\}$,

则 L_θ 和 L'_θ 都是长度等于 2 的线段，而且以 P_θ 为中点。不过 L_θ 与平面 $x_3=0$ 垂直，L'_θ 与平面的交角等于 $\theta/2$ 当 θ 由 0 增至 2π 时，$M=\bigcup_{\theta\in[0,2\pi]}L_\theta$ 是一个圆柱侧面，可是 $M'=\bigcup_{\theta\in[0,2\pi]}L'_\theta$ 则是一个麦比乌斯带。

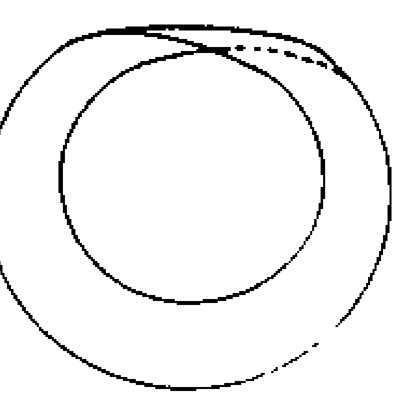


图 3.22

为下一节做准备，我们亦将麦比乌斯带看作一个在 R^4 中的 2 维流形。对任何 $\theta\in[0,\pi]$，

$$A_\theta = \{(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos 2\theta\sin\varphi, \sin 2\theta\sin\varphi) \mid \varphi\in[0,\pi]\}$$

是一个半圆。我们不难见到

$$M_1 = \bigcup_{\theta\in[0,\pi]} A_\theta$$

是一个在 R^4 中的麦比乌斯带，而且 ∂M_1 是圆

$$(x_1)^2+(x_2)^2=1, \quad x_3=x_4=0.$$

现在再谈几个比较一般性的切开和粘合。

已给一个无边缘 n 维流形 M，一个无边缘的 $n-1$ 维流形 M' 及一个拓扑嵌入

$$f: M' \to M.$$

如果将 M 沿着 $f(M')$ 切开，所得到的不一定是一个有边缘的 n 维流形。在第 9 节中已经见到，若 $M=R^3$，$M'=S^2$，而且 $f(M')$ 是一个亚力山大有角球面，则切开后所得到的不是一个有边缘的 3 维流形。所以作切开时，我们通常要用“良好”的拓扑嵌入 $f: M'\to M$，使保证于切开后所得到的是一个有边缘的 n 维流形。加强约当曲线定理说，任何一个拓扑嵌入 $f: S^1\to R^2$ 是良好的，它之所以在研讨 2 维流形时很有用处，主要的原因

就在此。

假设 M 是一个有边缘的 n 维流形，不一定是连通的，而且 $\lambda:\partial M\to\partial M$ 是一个同胚，使对任何 $x\in\partial M$，$\lambda(x)\neq x$ 而且 $\lambda^2(x)=\lambda(\lambda(x))=x$。将 ∂M 上每一点 x 与点 $\lambda(x)$ 相粘合，我们则得到一个无边缘的 n 维流形 M_λ。

作这个 M_λ，通常我们要求 M 在一个维数比较大的欧氏空间 $\boldsymbol{R}^N$ 之中，使存在一个映射

$$F:M\times[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}^N$$

满足下面两个条件：

(i) 对任何 $x\in M$，$F(x,0)=x$。

(ii) 若对任何 $t\in[0,1]$，

$$f_t:M\longrightarrow\boldsymbol{R}^N$$

的定义是

$$f_t(x)=F(x,t),$$

则对任何 $t\in[0,1)$，f_t 是一个同胚，而且对任何 $x\in M$，

$$f_1^{-1}f_1(x)=\begin{cases}\{x,\lambda(x)\}, & x\in\partial M,\\ \{x\}, & x\in M-\partial M.\end{cases}$$

所以我们可以将 $f_1(M)$ 看作 M_λ，而且当 t 由 0 增至 1 时，$f_t(M)$ 在 $\boldsymbol{R}^N$ 中连续变形，最后得到 M_λ。

为体会这里所说的，请读者仔细考虑下面的例子。$M=\{(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2\mid|x_1|\leq\pi,\ x_2=0\}$，$\lambda:\partial M\to\partial M$ 的定义是

$$\lambda(\pi,0)=(-\pi,0),\quad\lambda(-\pi,0)=(\pi,0),$$

而且 $F:M\times[0,1]\to\boldsymbol{R}^2$ 的定义是

$$F((x_1,0),t)=\begin{cases}(x_1,0), & t=0,\\ \left(\dfrac{1}{t}\sin tx_1,\dfrac{1}{t}(1-\cos tx_1)\right), & t>0.\end{cases}$$

若 $M=D^n$，而且 $\lambda:\partial D^n\to\partial D^n$ 的定义是 $\lambda(x)=-x$，则所

得到的无边缘的 n 维流形 M_λ 称为 n **维实射影空间**，记作

$$RP^n.$$

所以 RP^n 可以由 D^n 用粘合得到。不过为达到粘合的目的，我们须将 D^n 看作一个维数比较大的欧氏空间 R^N 中的流形，使能得到满足 (i) 与(ii) 两条件的映射 $F: D^n\times [0, 1] \longrightarrow R^N$。

上面所说的由一矩形 $M=ABCD$ 用粘合作出一圆柱侧面或一麦比乌斯带，我们不用 ∂M 的全部，却用其中一部分$\overline{AD}\cup \overline{BC}$。同时我们将 M 看作一个在 R^3 中的流形，使能有一个所需的映射，$F: M\times [0, 1] \to R^3$。因为一切很类似，而且不难用图形去体会，我们不多说了。

现在再谈一个特殊情形，就是 n 维流形 M 有两个连通分支 M_1 与 M_2，而且 $\lambda(\partial M_1) = \partial M_2$。在这情形下，我们将 M_λ 写成

$$M_1\cup_\lambda M_2.$$

一个例子是这节中起初所说的

$$S^2 = H^2_+\cup_\lambda H^2_-,$$

其中 H^2_+与 H^2_-是上半球和下半球，$\lambda: \partial H^2_+\to\partial H^2_-$是恒等同胚，即对任何 $x\in \partial H^2_+$，$\lambda(x) = x$。

因为 M_1 和 M_2 是 M 的两个连通分支，为粘合它们使得到 $M_1\cup_\lambda M_2$，我们需有一个同痕

$$F: M_1 \times [0,1] \longrightarrow R^N,$$

满足下面两个条件：

(i) 对任何 $t\in [0, 1]$，若

$$f_t: M_1 \to R^N$$

的定义是

$$f_t(x) = F(x,t),$$

则对任何 $x \in M$，$f_0(x) = x$。

(ii) 对任何 $t \in [0,1)$， $f_t(M_1) \cap M_2 = \varnothing$，

$f_1(M_1) \cap M_2 = f_1(\partial M_1) = \partial M_2$，而且对任何 $x \in \partial M_1$，

$$f_1(x) = \lambda(x)\ .$$

所以 $f_1(M_1) \cup M_2 = M_1 \cup_\lambda M_2$，而且当 t 由 0 增至 1 时，$f_t(M_1) \cup M_2$ 首先在 R^N 中连续变形，最后成为 $M_1 \cup_\lambda M_2$。

反过来，在 M_λ 中有一个流形 M'，由 ∂M 将每一点 $x \in \partial M$ 与点 $\lambda(x)$ 所得到的。如果将 M_λ 沿着 M' 切开，我们重新得到 M。同样地，如果将 $M_1 \cup_\lambda M_2$ 沿着 ∂M_2 切开，我们重新得到 M。

§12 曲　　面

因为任何一个 2 维流形中任何一个不等于$\varnothing$的开集亦是一个 2 维流形，所以，一般的 2 维流形实在太多了。为便利我们的掌握，在这一节中我们只考虑紧的 2 维流形。

若 M 是一个紧的 2 维流形，则 M 是由有限个紧的连通 2 维流形所构成。所以我们只要了解紧的连通 2 维流形就可以了。

已给一个紧的连通 2 维流形 M。则 ∂M 是一个紧的无边缘的 1 维流形，于是 ∂M 是由有限个简单闭曲线 $S_1, \cdots, S_r$ 所构成。令 M' 为一个紧的 2 维流形，由 r 个闭圆盘 $D_1, \cdots, D_r$ 所构成。又令 $\lambda: \partial M \to \partial M'$ 为一个同胚，使 $\lambda(S_i) = \partial D_i$，$i = 1, \cdots, r$，则

$$M \cup_\lambda M'$$

是一个紧的无边缘的连通 2 维流形。反过来，我们可以从 $M \cup_\lambda M'$ 重新得到 M。所以我们不妨只考虑紧的无边缘的连通 2 维流形。为简便起见，我们称紧的无边缘的连通 2 维流形为曲

面。

在第10节中我们曾提到下面的结果。

(12.1)　每一个曲面是可剖分的。

现在我们列举已经知道的曲面，然后再作新的曲面。

Ⅰ．**2维单位球面** $S^2=\{x\in \boldsymbol{R}^3 \mid \|x\|=1\}$．

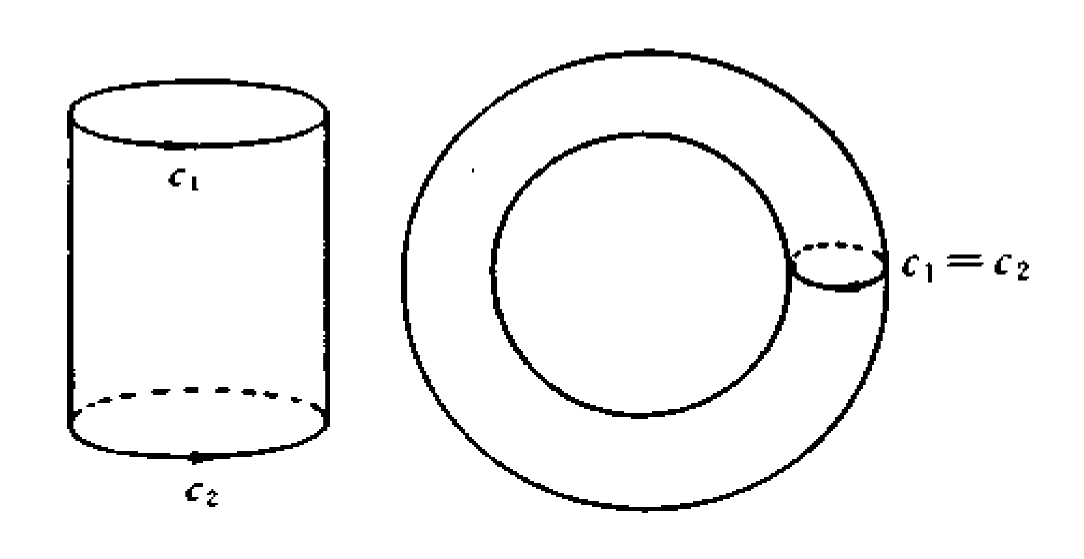


图3.23　　　　图3.24

Ⅱ．**环面** T^2．在上一节中我们已经作出一个圆柱侧面 M．那是一个紧的有边缘的连通2维流形，它的边缘由两个圆 C_1 和 C_2 所构成。令 λ: $C_1\to C_2$ 为一个同胚，如图中所示，λ 保持两个圆的方向一样。则 M_λ 是一个环面 T^2．

在 $\boldsymbol{R}^3$ 中由圆柱侧面 M 去作环面 T^2，我们假定 M 是一橡皮管，可以拉长，亦可以压短。于是我们将 M 卷起来，直到 C_1 和 C_2 粘合在一起。因此 M 上的母线都成为 T^2 上的圆，而且相互间不相交。

这个在 $\boldsymbol{R}^3$ 中由圆柱侧面 M 去作环面 T^2，由直觉去想象应该相当容易。又上一节中由一个矩形去作一个圆柱侧面或一个麦比乌斯带亦可以在 $\boldsymbol{R}^3$ 中做的。读者们不妨自己去想象看看。

现在再用解析几何的方法去看 R^3 中的一个环面。方程式

$$x_1^2+(x_2-2)^2=1,\quad x_3=0$$

表示一个在 R^3 中平面 $x_3=0$ 上的圆，它的中心是（0，2）而且它的半径等于1。将这个圆依 x_1 轴旋转，我们则得到一个环面 T^2。T^2 上面的点一般可以写成

$$(\sin\varphi,(2+\cos\varphi)\cos\theta,(2+\cos\varphi)\sin\theta),\quad \theta,\varphi\in[0,2\pi].$$

Ⅱ．实射影平面 RP^2．

在上一节中说过，若 λ：$\partial D^2\to\partial D^2$ 是一个同胚，它的定义是 $\lambda(x)=-x$，我们只要 D^2 中 ∂D^2 上每一点 x 与点 $\lambda(x)$ 相粘合，就可以得到一个 RP^2。在这里的粘合必须在 R^4 中去做，在 R^3 中是做不到的。现在让我们来说明。

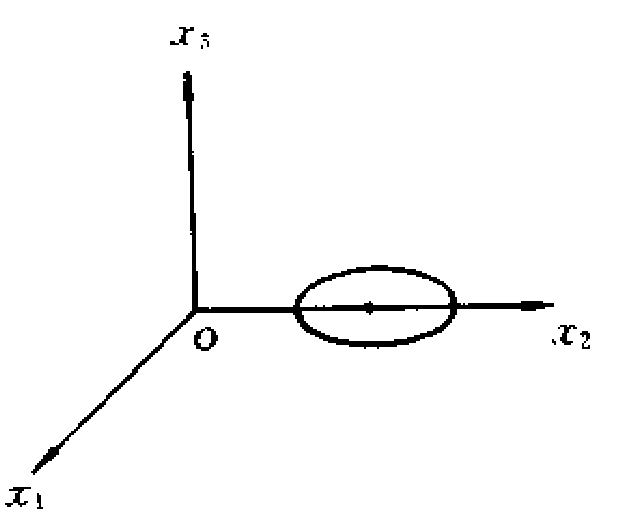


图 3.25

将 D^2 沿着圆 $C=\{x\in D^2\mid\|x\|=1/2\}$ 切开，我们得到一个圆环

$$M_1'=\{x\in D^2|1/2\leqq\|x\|\leqq1\}$$

和一个圆盘

$$M_2'=\{x\in D^2|\|x\|\leqq1/2\}.$$

将 M_1' 中 ∂D^2 上每一点 x 与点 $\lambda(x)$ 相粘合，我们得到一个2维流形 M_1，是一个麦比乌斯带。（理由何在？请读者自己去想想。）因为

$$\partial M_1=M_1\cap M_2=\partial M_2,\quad RP^2=M_1\cup M_2,$$

RP^2 是由粘合一个麦比乌斯带 M_1 和一个圆盘 M_2 所得到的。

凭直觉，我们想象在 R^3 中有一个麦比乌斯带 M_1 和一个圆盘 M_2 。如果要粘合成一个实射影平面 RP^2，我们必须将 M_1 和 M_2 安放在一个位置使

$$\partial M_1 = M_1 \cap M_2 = \partial M_2.$$

只要自己去试试，我们就能发现其间有难以克服的困难。事实上在 R^3 中我们不能够将 M_1 与 M_2 粘合成 RP^2 。要肯定这事实，唯一的方法是用高深的数学，不是直观所能说明的。

现在换在 R^4 中来看。令 M_1 为上一节中所说的麦比乌斯带，M_2 为圆盘

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 \leq 1, \quad x_3 = x_4 = 0 .$$

则$\partial M_1 = M_1 \cup M_2 = \partial M_2$ 。于是$M_1 \cup M_2$是一个实射影平面RP^2 。

这是用增高维数来克服困难的一个例子。又一个简单的例子是在 R^2 上有两条路，一条由南到北，一条由东到西。则这两条路非相交不可。如果换在 R^3 中来看，我们可以将一条路在交点架高，使在另一条路上面跨过去。则两条路就不相交了。这个例子虽简单明了，但对在 R^4 中作 RP^2 有启示作用。是值得我们注意的。

Ⅳ．**克莱茵瓶** KB 。如环面一样，我们可由一个圆柱侧面 M 去作一个克莱茵瓶。我们知道 ∂M 是由两个圆 C_1 和 C_2 所构成。令 $\mu: C_1 \to C_2$ 为一个同胚。如图 3.26 所示，使两圆的方向相反，则 M_μ 是一个克莱茵瓶 KB 。作环面时可以在 R^3 中，但是作克莱茵瓶时必须增高维数，在 R^4 中才能够作成功。

现在尝试去想象一个克莱茵瓶。先将圆柱侧面看作一个橡皮管。将上面部分拉长压小。然后扭转在管壁插进去，使 C_1 与 C_2 相粘合（见示意图 3.27）。如果在 R^3 中去做，插进管壁时橡皮管自我相交于一条简单闭曲线，于是所得到的不是一个真正的克莱茵瓶。不过换在 R^4 中去做时，我们可以将橡皮管的某一

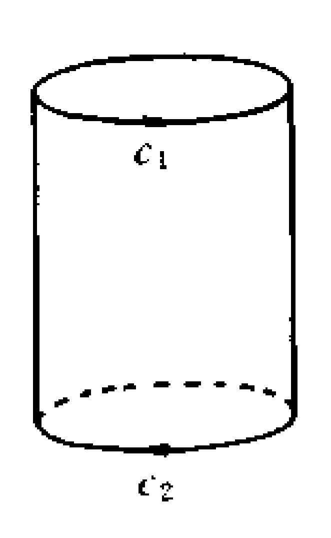


图 3.26

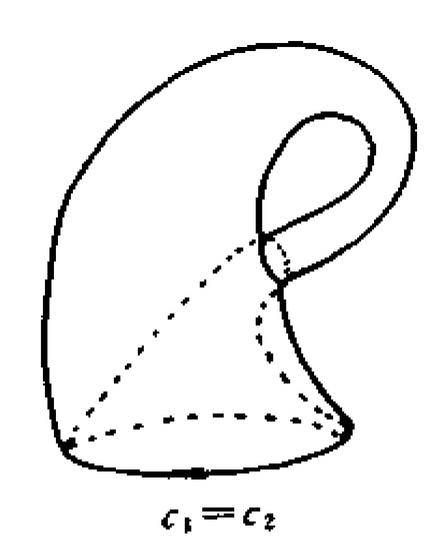


图 3.27

段在第四个方向稍稍挪动一点，使橡皮管不会自我相交。所以得到了一个克莱茵瓶。

再用解析几何的方法来看 R^4 中的一个克莱茵瓶。对任何 $\theta\in[0,\pi]$，

$$C_\theta=\{(\cos\theta\cos\varphi,\sin\theta\cos\varphi,\cos2\theta\sin\varphi,\sin2\theta\sin\varphi)\mid \varphi\in[0,2\pi]\}$$

是一条简单闭曲线。$C_0=C_\pi$ 而且对任何 $0\leqq\theta<\theta'<\pi$，$C_\theta\cap C_{\theta'}=\varphi$。再者，

$$C=\bigcup_{\theta\in[0,\pi]}C_\theta$$

是一个克莱茵瓶。反过来，将 C 沿着 C_0 切开，我们则得到一个（拓扑）圆柱侧面。

（12.2）　一个克莱茵瓶可以由粘合两个麦比乌斯带得到的。

证明：令 C 为上面所说的在 R^4 中的一个克莱茵瓶。又令

$$A\{(\cos\theta\cos\varphi,\sin\theta\cos\varphi,\cos2\theta\sin\varphi,\sin2\theta\sin\varphi)\mid \theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,\pi]\},$$

$$B=\{(\cos\theta\cos\varphi,\sin\theta\cos\varphi,\cos2\theta\sin\varphi,\sin2\theta\sin\varphi)\mid$$

$$\theta \in [0,\pi], \varphi \in [\pi, 2\pi]\} .$$

在上一节中我们已经见到 A 是一个麦比乌斯带。于是 B 亦是一个麦比乌斯带。因为

$$C = A \cup B, \quad \partial A = A \cap B = \partial B,$$

所以 (12.2) 成立。

在作新的曲面之前，我们得介绍作的方法，即两个无边缘的 n 维流形的连接和。已给两个无边缘的连通 n 维流形 M_1 与 M_2 及两个拓扑嵌入

$$f_1 : D^n \longrightarrow M_1, \quad f_2 : D^n \longrightarrow M_2,$$

使 $M_1 - f_1(D^n - \partial D^n)$ 与 $M_2 - f_2(D^n - \partial D^n)$ 是两个有边缘的连通 n 维流形。用同胚

$$\lambda = f_2 f_1^{-1} : f_1(\partial D^n) \longrightarrow f_2(\partial D^n) .$$

将 $M_1 - f_1(D^n - \partial D^n)$ 与 $M_2 - f_2(D^n - \partial D^n)$ 粘合在一起，我们则得到一个新的无边缘的连通 n 维流形

$$M_1 \# M_2,$$

称作 M_1 与 M_2 的**连接和**。一般来说，在同胚之下，$M_1 \# M_2$ 不但可能随 M_1 与 M_2 的改变而改变，而且随 f_1 与 f_2 的改变而改变的可能性亦得慎重考虑。不过在 $n=2$ 时，下面两个结果可以利用加强约当定理证明得到。

(12.3)　若 M_i 是一个 2 维球面，或一个环面，或一个实射影平面；$i=1, 2$，则对任何拓扑嵌入 $f_1 : D^2 \to M_1$ 与 $f_2 : D^2 \to M_2$，我们能够作连接和 $M_1 \# M_2$，而且在同胚之下，$M_1 \# M_2$ 由 M_1 和 M_2 决定，不会随 f_1 与 f_2 的改变而改变。再者，$M_2 \# M_1$ 与 $M_1 \# M_2$ 同胚，而且当 M_1 是一个 2 维球面时，$M_1 \# M_2$ 与 M_2 同胚。

(12.4)　已给 r 个曲面 $M_1, \cdots, M_r$，$r \geq 3$，其中每一个 M_i 是一个 2 维球面，或是一个环面，或是一个实射影平面，我

们则能够作曲面

$$M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_r = M_1 \# (M_2 \# \cdots \# M_r).$$

再者，在同胚之下，这曲面由 $M_1, \cdots, M_r$ 决定，称作 $M_1, \cdots, M_r$ 的**连接和**。

(12.5) **两个实射影平面的连接和是一个克莱茵瓶。**

证明：已给两个实射影平面 M_1 与 M_2。由Ⅱ我们知道对任何 $i=1, 2$，有一个拓扑嵌入 $f_i: D^2 \to M_i$，使 $M_i - f_i(D^2 - \partial D^2)$ 是一个麦比乌斯带。所以由 (12.2) 和 (12.3)，我们知道 $M_1 \# M_2$ 是一个克莱茵瓶。

利用 (12.4)，我们可以作新的曲面如下。

Ⅴ. 对任何 $r \in N$，我们有一曲面

$$rT^2 = \begin{cases} \text{环面}, & r=1, \\ r\text{ 个环面的连接和}, & r>1. \end{cases}$$

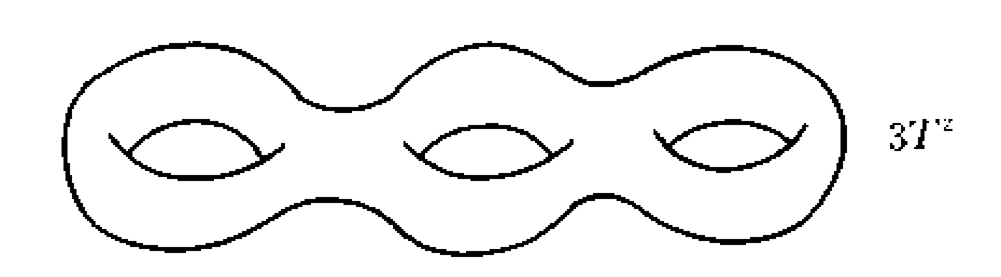


图 3.28

Ⅵ. 对任何 $r \in N$，我们有一个曲面

$$rRP^2 = \begin{cases} \text{实射影平面}, & r=1, \\ r\text{ 个实射影平面的连接和}, & r>1. \end{cases}$$

(12.6) **曲面分类定理。** 任何一个曲面必定同胚于下列曲面中的一个

S^2;

$T^2, 2T^2, 3T^2, \cdots$;

$RP^2, 2RP^2, 3RP^2, \cdots$.

证明(12.6)须用到可剖分定理(12.1)。究竟如何，不是我们能够说明的。因为有(12.6)，我们可以改良(12.3)，而令 M_1 与 M_2 为任何两个曲面。同样地我们可以改良(12.4)而令 M_1，…，M_r 为任何 r 个曲面。利用这结果和(12.5)，我们可以得到下面结果。

(12.7) 对任何 $r\in N$，

(1) rKB 与 $2rRP^2$ 同胚；

(2) $RP^2\#rKB$ 与 $(2r+1)RP^2$ 同胚。

我们还可以用旁的方法去作 rT^2 和 rRP^2。

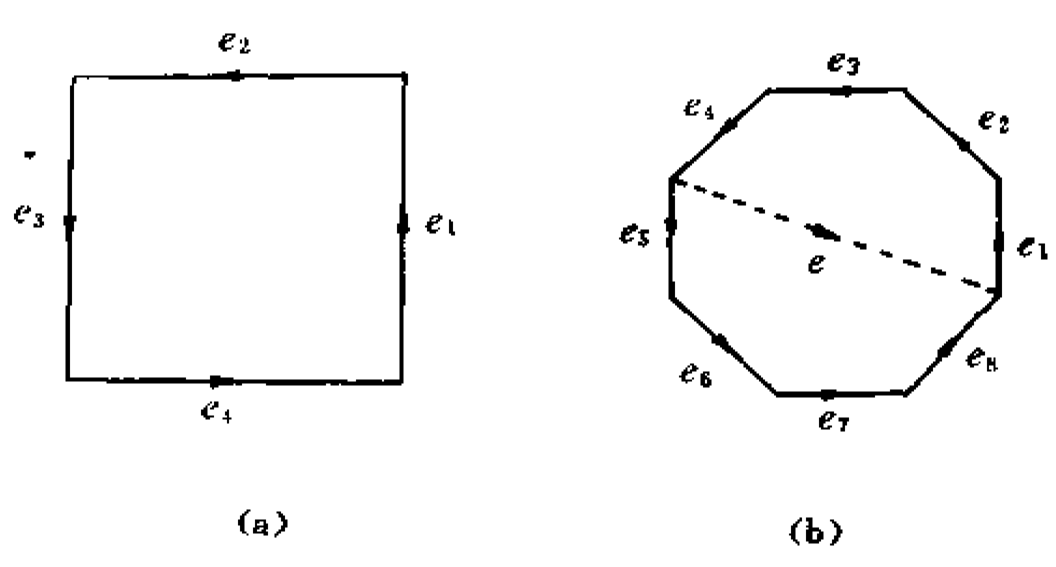


图 3-29

对任何 $r\in N$，令 M 为一个正 $4r$ 角形，看作一个同胚于 D^2 的 2 维流形。则 ∂M 是由 M 的 $4r$ 条边所构成。现在将这些边依反时针方向依次记作 e_1，e_2，e_3，e_4，…，e_{4r-3}，e_{4r-2}，e_{4r-1}，e_{4r}。先将 ∂M 的 $4r$ 个顶点粘合在一起，于是每一个 e_i 成为一个有方向的圆，而且这 $4r$ 个圆有一个公共点。所以在粘合之后，∂M 是 $4r$ 个有方向的圆 e_1，…，e_{4r}的并集。令

$$\lambda:\partial M\to\partial M$$

为一个映射，使对任何 $x\in\partial M$，$\lambda^2(x)=x$，又对任何 $i=1,\cdots,r$，

$$\lambda(e_{4i-3}) = e_{4i-1}^{-1}, \quad \lambda(e_{4i-2}) = e_{4i}^{-1},$$

而且

$$\lambda: e_{4i-3} \to e_{4i-1}^{-1}, \quad \lambda: e_{4i-2} \to e_{4i}^{-1}$$

是同方向的同胚。在这里若 e 代表有方向的 M 的边，e^{-1} 代表相同的边但具相反的方向。现在将 ∂M 上每一点 x 与点 $\lambda(x)$ 相粘合，我们则得到一个曲面，同胚于 rT^2，理由如下：

先看 $r=1$ 情形。将 e_1 与 e_3^{-1} 粘合后我们得到一个圆柱侧面。它的边缘中有两个圆，由 e_2 和 e_4^{-1} 所得到，于是有相同的方向。所以最后得到的是一个环面。

其次看 $r=2$ 情形。将正 8 角形沿着一条对角线切开，使得到两个 5 角形，其中一个的边是 e_1，e_2，e_3，e_4 和切开线段 e，另一个的边是 e_5，e_6，e_7，e_8 和切开线段 e^{-1}。因为最后 M 的顶点都要粘在一起的，所以我们不妨先将每个 5 角形中 e 的两个端点粘在一起。于是每个 5 角形成为一个 4 角形，但其中一部分被挖掉，挖掉部分的边缘是一简单闭曲线，由 e 所得到的（图 3.31）。如果每个 4 角形中没有一部分被挖掉，则粘合后由每个 4 角形得到一个环面。所以最后所得到的是将两个环面各挖掉一部分，然后再将它们连接在一起。因此我们可以见到由正 8 角形所得到的是两个环面的直接和 $2T^2$。

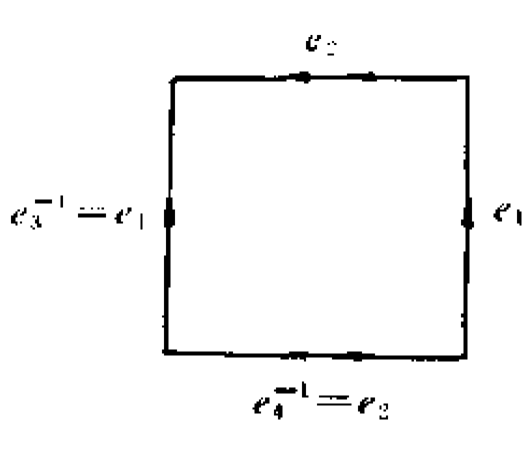


图 3.30

如何由一个正 $4r$ 角形得到 rT^2，理由是相同的。我们不再说明了。

在 Ⅰ 中我们已经知道如何去作 RP^2。所以现在只要作 rRP^2，$r>1$ 就可以。令 M 为一个正 $2r$ 角形，看作一个同胚于

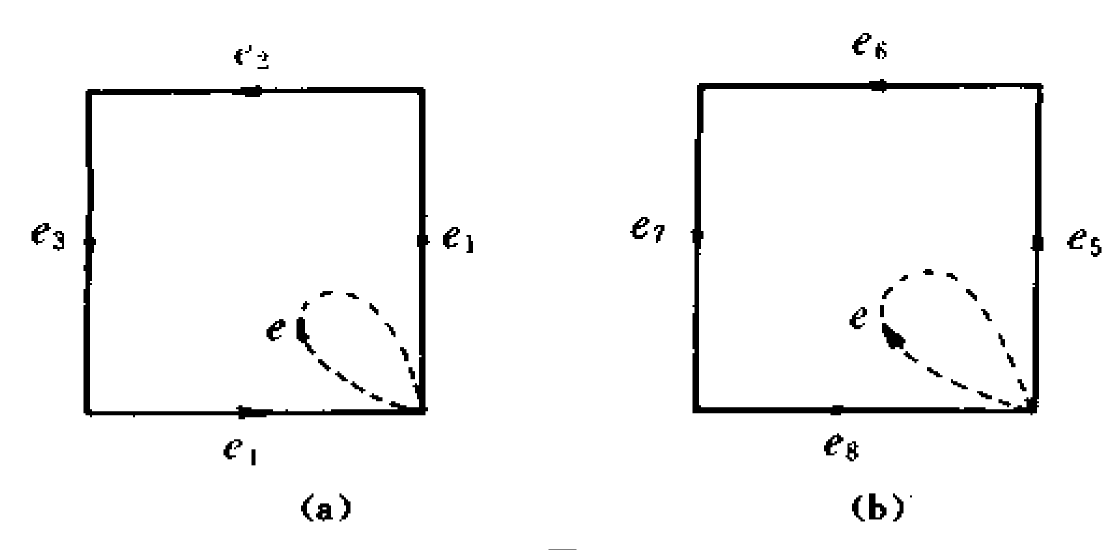


图 3.31

D^2 的 2 维流形，则 ∂M 是由 M 的 $2r$ 条边所构成。沿反时针方向，我们将 M 的边依次记作

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{2r-1},\ e_{2r}.$$

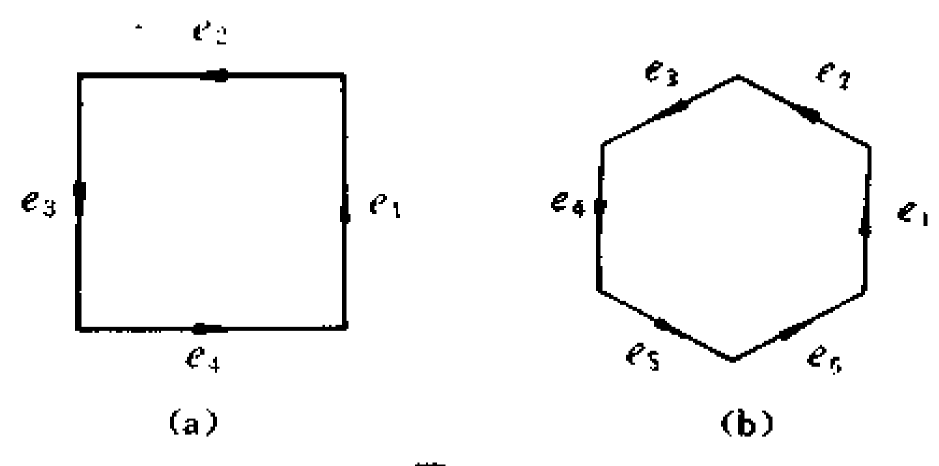


图 3.32

令

$$\lambda: \partial M \longrightarrow \partial M$$

为一个映射，使任何 $x \in \partial M$，$\lambda^2(x)=x$，又对任何 $i=1,\cdots,r$，

$$\lambda(e_{2i-1}) = e_{2i}$$

而且

$$\lambda: e_{2i-1} \longrightarrow e_{2i}^{-1}$$

是一个同方向的同胚. 对任何 $x \in \partial M$,我们将 x 与 $\lambda(x)$ 相粘合,所得到的是一个与 $r\boldsymbol{R}P^2$ 同胚的曲面.

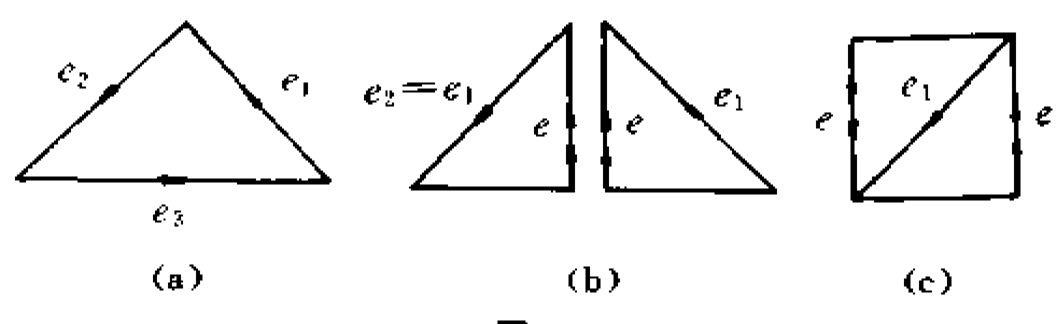


图 3.33

为说明这事实，我们先观察一个直角二等边 3 角形，它的边依次为

$$e_1, \ e_2, \ e_3.$$

令 $\lambda: e_1 \rightarrow e_2$ 为一个同方向的同胚，而将 e_1 上每一点 x 与点 $\lambda(x)$ 相粘合. 所得到的是一个麦比乌斯带. 如图 3.33 (c) 所表示. 先将三角形沿 e_3 的垂直线切开成为两个三角形，而将切线记作 e. 其次将两三角形上的 e_1 粘合在一起，得一正方形，以 e 为一对对边. 最后将 e 粘合在一起，得到一个麦比乌斯带.

现在说明 $r=2$ 情形. 将正方形沿一对角线切开，得到两个直角二等边 3 角形. 一个 3 角形的边是 e_1, e_2 和切开线段 e, 另一 3 角形的边是 e_3, e_4 和 e^{-1}, 如上面所说，由每个 3 角形经粘合得到一个麦比乌斯带，它的边缘是由 e 得到的. 所以最后得到的是将两个麦比乌斯带粘合在一起. 由 (12.5)

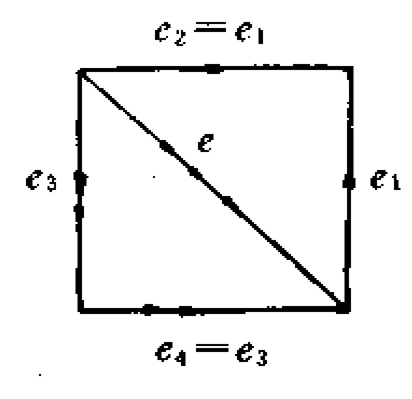


图 3.34

知道那是一个克莱茵瓶.

我们还可以换一角度来看. 如看 $2T^2$ 一样，先将每一 3 角形中 e 的两个端点粘合在一起. 所得到的是一个圆盘，其中一部分被挖掉. 被挖掉部分的边缘是一条单闭曲线，是由 e 所得到的. 如果每个圆盘没有一部分被挖掉，则粘合后由每个圆盘得到一个实射影平面. 所以最后所得到的是将两个实射影平面每一个都挖掉一部分，然后将它们连接在一起. 因此我们见到那是两个实射影平面的连接和.

下面的结果不是容易想象的.

(12.8) 对任何 $r\in N$，$rRP^2\# KB$ 与 $rRP^2\# T^2$ 同胚.

证明：我们只须证明 $r=1$ 情形就够了.

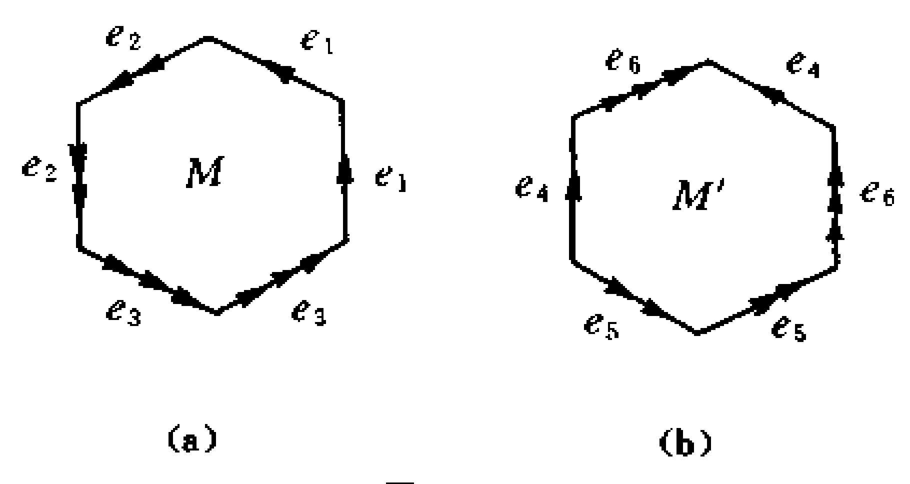


图 3.35

因为 KB 与 $2RP^2$ 同胚，所以 $RP^2\# KB$ 可以由一个正 6 角形 M 得到. 方法是如图 3.35 (a) 所示，将 ∂M 上 e_i 与 e_i 相粘合，$i=1$，2，3. 同样地，$RP^2\# T^2$ 亦可以由一个正 6 角形 M' 得到，方法亦如图 3.35 (b) 所示，将 $\partial M'$ 上 e_i 与 e_i 相粘合，$i=4$，5，6.

如何由 M 得到 M'，当然要用切开和粘合. 方法是用下面的六个 6 角形来表示.

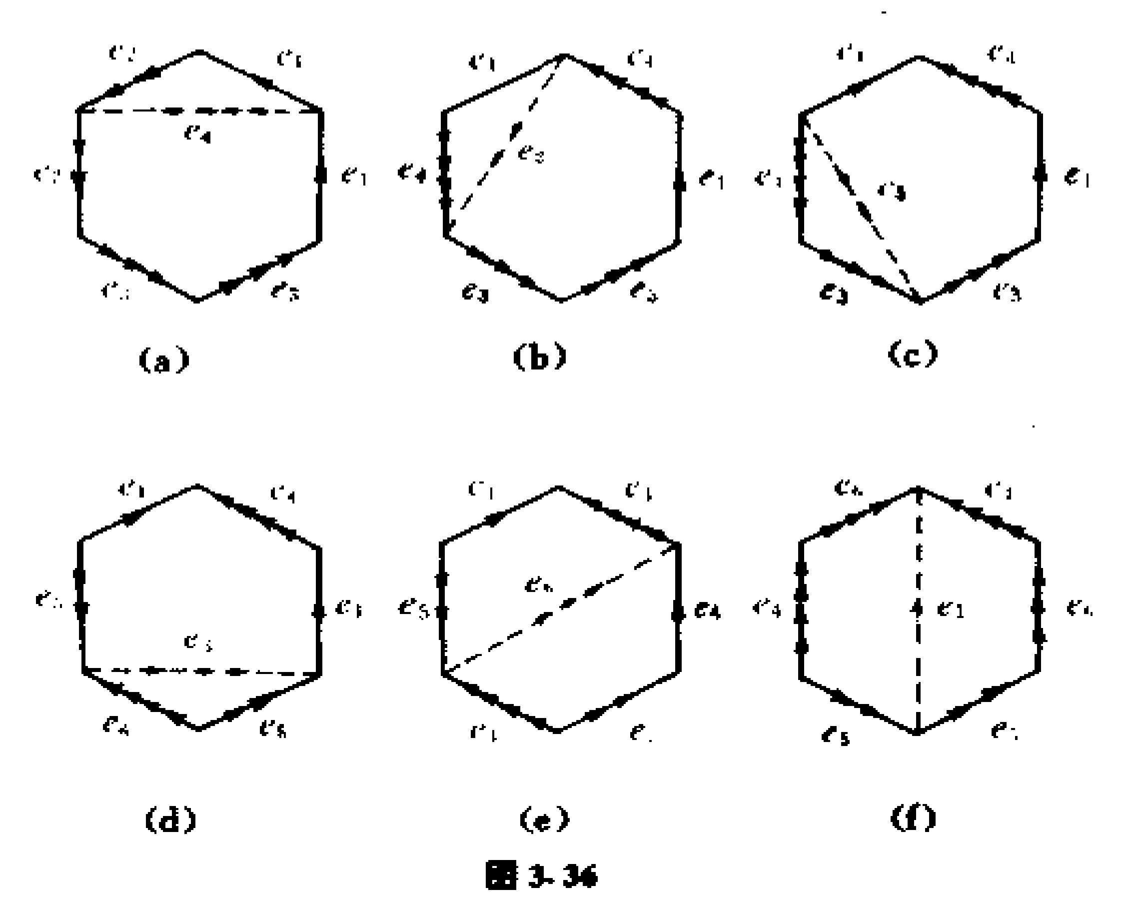


图 3.36

从上一行左边第一个 6 角形去得第 2 个 6 角形是将第一个 6 角形沿 e_4 切开然后将 e_2 粘在一起. 同样地从第二个 6 角形去得第三个 6 角形. 再依次得下一行三个 6 角形. 我们知道最初一个是 M，而且最后一个是 M'. 所以 (12.8) 成立.

一个曲面 M 与一个环面的连接和可以看作在 M 上加一个环柄，见图 3.37.

因此由 (12.6) 和(12.7) 知道任何一个曲面同胚于一个 2 维球面上加有限个环柄，或一个实射影平面加有限个环柄，或一个克莱茵瓶加有限个环柄.

(12.1) 说每一个曲面都是可剖分的. 虽然我们没有证明这成果，但是我们能够对 (12.6) 中所列出的每一个曲面给一个剖

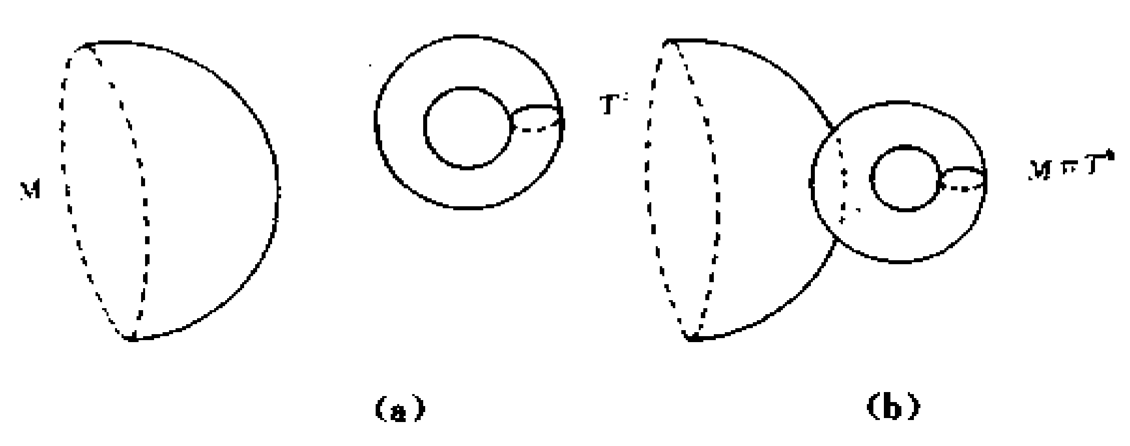
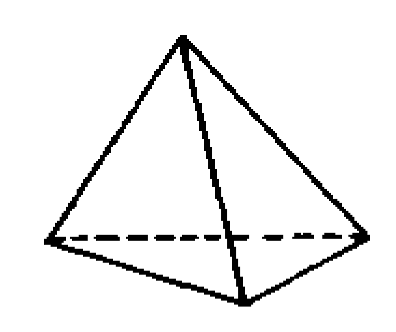


图 3.37

分．一个 2 维球面的剖分有很多．最简单的是下列两个．



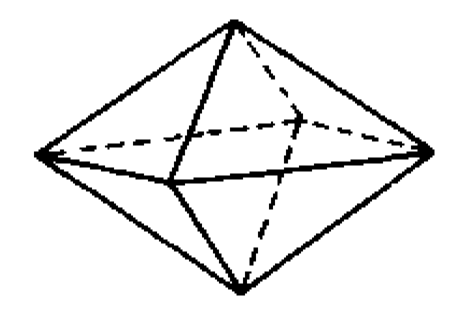


图 3.38

环面的剖分可以看图 3.39．在一正方形中作一小正方形．将小正方形分作四个 3 角形又将两正方形之间分作十二个 3 角形．

用类似的方法，我们可将 rT^2 剖分如下．在一正 $4r$ 角形之中作一小正 $4r$ 角形．将小正 $4r$ 角形分作 $4r$ 个 3 角形，又将两个正 $4r$ 角形之间分作 $12r$ 个 3 角形．

我们作实射影平面时用一个圆盘．现在用一个正 6 角形来代替．于是可以用图 3.40 表示一个剖分．在一正 6 角形之中作一个小的正 6 角形．将小的正 6 角形分作六个 3 角形，又将两个正 6 角形之间分作 12 个 3 角形．

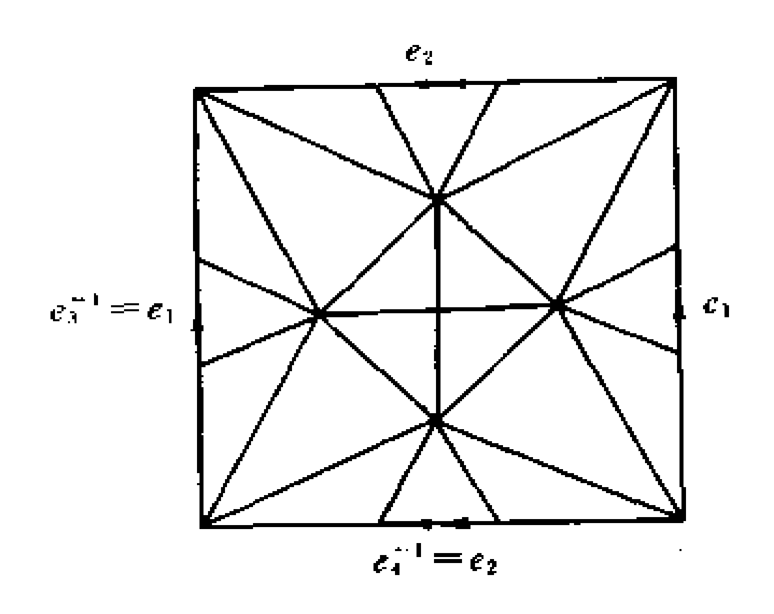


图 3.39

用类似的方法，我们可将 rRP^2 剖分如下. 作 rRP^2 时，我们用一个正 $6r$ 角形. 在正 $6r$ 角形作一个小的正 $6r$ 角形. 将小的正 $6r$ 角形分作 $6r$ 个 3 角形. 又将两个正 $6r$ 角形之间分作 $12r$ 个 3 角形.

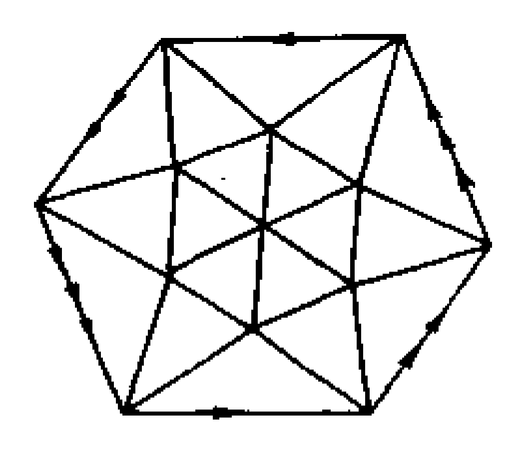


图 3.40

利用这些剖分，我们计算曲面的欧拉示性数.

(12.9) (1) $e(S^2)=2$.

(2) $e(rT^2)=2-2r$.

(3) $e(rRP^2)=2-r$.

有不同欧拉示性数的两个曲面是不会同胚的. 另方面，rT^2 与 $2rRP^2$ 虽然有相同的欧拉示性数，但是 rT^2 与 $2rRP^2$ 却不同胚. 原因是 rT^2 有正反两面，称作**可定向曲面**，但 rRP^2 无正反面，称作**不可定向曲面**.

§ 13　着色问题和四色猜测

已给一个曲面 M. M 上一条**曲线段**是 M 中一个与 $[0,1]$ 同胚的 1 维流形. M 上一个**网络** G 是 M 的一个子集，由有限条曲线段构成，使其中任何两条不同的曲线段的交集或是空集 $\varnothing$，或是一个公共端点，或是两个公共端点，见图 3.41.

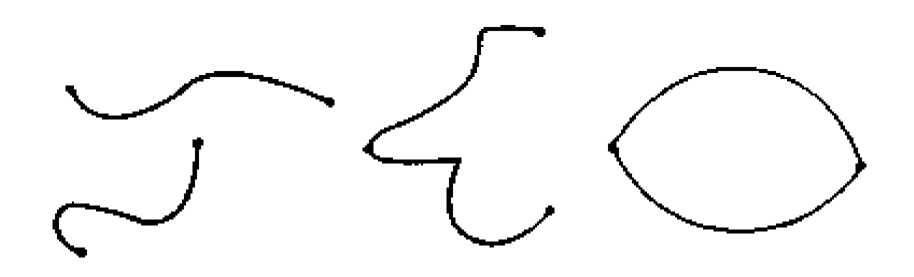


图 3.41

已给 M 上一个网络 G. 则 G 将 M 分作有限个**区域**，每个区域是 $M-G$ 的一个连通分支. 对任何两个不同的区域 R_1 与 R_2，若 $\overline{R}_1\cap\overline{R}_2$ 至少包含 G 中一条曲线段，我们说 R_1 与 R_2 是**相邻的**. 否则的话，我们说 R_1 与 R_2 是**不相邻的**. 所以对不相邻的两个区域 R_1 与 R_2，$\overline{R}_1\cap\overline{R}_2$ 仍有可能包含有限个点.

着色问题. 已给一个曲面 M，被一个网络 G 分作有限个区域. 我们将每一区域着一种颜色，而且要求任何两个相邻的区域上有不同的颜色. 现在问我们最少需用多少种颜色，使对 M 上任何一个网络 G，都能够完成我们的着色.

这个问题是由将地球仪上诸国家着色所引起的. 当初的猜测是最少需用 4 种颜色. 这就是所谓**四色猜测**.

1879 年 Kempe 发表了一篇论文，内容是四色猜测的证明. 不过在十一年之后，即 1890 年，Heawood 在一篇论文中指出，

Kempe 的证明中有漏洞．不能算肯定了四色猜测．虽然如此，Heawood 指出 Kempe 论文中的构想很有价值．只要稍加修改，可以得到：

（13.1）**五色定理**．对 2 维球面上任何一个网络，我们只需用五种颜色去着色被划分成的区域，可使任何两个相邻区域上有不同的颜色．

四色猜测属于拓朴学，但是去了解四色猜测并不需要拓扑知识．所以若干年来，不但有许多数学家尝试去弥补 Kempe 证明中的漏洞，或另找途径去证明四色猜测，而且还有无数懂很少数学的人，去做类似的努力．

四色猜测的证明是 Appel 与 Haken 两人在 1976 年得到的，他们针对 Kempe 证明中的漏洞，先找出 1936 个“不可避免”的网络．然后运用大型的计算机，去分析对每一个不可避免的网络所引起的着色问题．他们的结论是在每一情形下，有 4 种颜色就足够了．去分析非常繁杂的 1936 个不可避免的网络，他们用了几百小时计算机的时间，工作量之大当然不是人力所能做得到的．所以他们亦曾尽力去简化．经过深入思考后，他们将不可避免的网络减至 1482 个，但是感觉到减至 1200 个之下的可能性相当渺茫，所以依循他们的方法，我们就不得不依靠计算机了．如果我们放弃计算机，而希望用逻辑推导的方法去证明四色猜测，那么非别开途径不可．这一点有无数人努力过，但是一百年来还没有看到一丁点成功的征象．

现在回到当初提出的着色问题，已给一个曲面 M，不一定是 2 维球面，则 M 有一个欧拉示性数 $e(M)$．令 M 的 Heawood 数

$$H(M)$$

为不大于

$$(7+\sqrt{49-24e(M)})/2$$

的最大自然数.

(13.2) 已给一个曲面 M. 则在 M 上有一个网络，使我们最少要用 $H(M)$ 种颜色去着色被划分成的区域，才可使任何两个相邻区域上有不同的颜色. 另方面，对 M 上任何一个网络，我们都可以用 $H(M)$ 种颜色去着色被划分成的区域，使任何两个相邻的区域上有不同的颜色.

在 $M=S^2$ 时，(13.2) 即四色猜测，在上面已经说过，目前我们所知道的唯一证明，是依靠计算机去分析不可避免的网络才得到的. 在 $M\neq S^2$ 时，这结果是 Heawood 给的，但 Heawood 并没有完成他的证明. 经过若干数学家的继续努力，到 1968 年才算完成. 比 Appel 和 Haken 证明四色猜测早了八年. 在这里值得一提的，是对 $M\neq S^2$ 情形，我们不须用计算机. 用逻辑推导就够了. 高水平的读者们如果想进一步了解这方面知识，可以去阅读 Saaty and Kainen, The Fous Color Problem, Assault and Conquest, 1977.

对比较简单的曲面 M，我们将 $e(M)$ 和 $H(M)$ 的数值列成一表如下.

M	$e(M)$	$H(M)$	M	$e(M)$	$H(M)$	M	$e(M)$	$H(M)$
S^2	2	4	RP^2	1	6	KB	0	7
T^2	0	7	$RP^2\#T^2$	−1	7	$KB\#T^2$	−2	8
$2T^2$	−2	8	$RP^2\#2T^2$	−3	9	$KB\#2T^2$	−4	9
$3T^2$	−4	9	$RP^2\#3T^2$	−5	10	$KB\#3T^2$	−6	10
…	…	…	……	…	…	……	…	…

第四章　微分拓扑

§14　微积分

讨论微分拓扑，我们必须要用到微积分. 读者大概都读过微积分的课程，所以在这一节中，我们只简略地提一提.

已给 $\boldsymbol{R}$ 中一个开集 U，及一个函数

$$f: U \longrightarrow \boldsymbol{R}.$$

对任何 $x \in U$，若 t 是一个接近于 0 但不等于 0 的实数，则 $x+t \in U$，于是得到一个实数

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t}.$$

当 t 接近 0 时，如果这实数有一个极限 $f'(x)$，我们称 $f'(x)$ 为 f 在数 x 的导数. 所以

$$f'(x)=\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}.$$

如果 $f'(x)$ 对所有 $x \in U$ 都存在，我们则得到 f 的导函数

$$f': U \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

同样地，我们考虑 f' 在每一个 $x\in U$ 的导数 $f''(x)$ 及 f' 的导函数

$$f'': U \longrightarrow \boldsymbol{R}.$$

若 f''存在，我们称 f''为 f 的**第 2 阶导函数**，同时称 f' 为 f 的**第 1 阶导函数**.

如此继续做下去. 若 f 的**第 k 阶导函数**，$k\geqslant 1$，$f^k: U\to\boldsymbol{R}$ 存在，我们则考虑 f^k 的导函数 $f^{k+1}: U\to\boldsymbol{R}$. 如果 f^{k+1}存在，我们称 f^{k+1}为 f 的**第 $k+1$ 阶导函数**.

若对任何 $k\in\boldsymbol{N}$，f 的第 k 阶导函数 f^k 存在，我们说 f 是**光滑的**.

在这一节中我们只给少数例子. 在（14.1）中，读者们可以见到一个**光滑函数**的例子、对没有学过微积分的读者，我们希望他们在读下去之前，自己须阅读一本简浅的微积分读本，并学会如何去计算导函数和定积分.

已给 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个开集 U 及一个函数

$$f: U \longrightarrow \boldsymbol{R}.$$

对任何 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in U$，则有一个实数

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n).$$

对任何 $i=1$，$\cdots$，n，我们将 x_1，$\cdots$，x_{i-1}，x_{i+1}，$\cdots$，x_n 固定，而将 f 看作 x_i 的函数. 于是我们能够考虑导函数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \longrightarrow \boldsymbol{R}.$$

如果$\frac{\partial f}{\partial x_i}$存在，我们称$\frac{\partial f}{\partial x_i}$为 f **对** x_i 的**偏导函数**. 这些偏导函数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ i=1,\ \cdots,\ n$$

称作 f 的**第 1 阶偏导函数**.

若 f 的第 1 阶偏导函数都存在，同样地我们可以去考虑 f

的第 2 阶偏导函数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

若 f 的第 2 阶偏导函数都存在，我们可以去考虑 f 的第 3 阶偏导函数．一般来说，若 f 的第 k 阶偏导函数都存在，我们可以去考虑 f 的第 $k+1$ 阶偏导函数．

假设对任何 $k\in \boldsymbol{N}$，f 的第 k 阶偏导函数都存在．我们说 f **是光滑的**．因为这时候 f 是连续的，所以我们称 f 为一个**光滑映射**．再者，在任何一个第 k 阶偏导函数

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}$$

中，∂x_{i_1}，…，∂x_{i_k}的顺序可以任意改变．

已给 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个开集 U，及一个函数

$$f:\ U \longrightarrow \boldsymbol{R}^N.$$

则存在 N 个函数

$$f_1,\ \cdots,\ f_N:\ U \longrightarrow \boldsymbol{R},$$

使对任何 $x\in U$，

$$f(x) = (f_1(x),\cdots,f_N(x)).$$

若 f_1，…，f_N 都是光滑的，我们说 f **是光滑的**，而且称 f 为一个**光滑映射**．

若 f 是一个光滑映射，也是一个拓扑嵌入，而且对任何 $x\in U$，$N\times n$ 矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\cdots,N;j=1,\cdots,n}$$

在点 x 的秩等于 n，就是说其中有一个 $n\times n$ 行列式不等于 0，我们说 f 是一个**光滑嵌入**．

已给原点 θ 在 $H^n=\{x\in \boldsymbol{R}^n | x_n\geq 0\}$ 中一个邻域 V 及一个

函数

$$g: V \longrightarrow R^N.$$

若存在一个 R^n 中的开集 U 及一个光滑映射（或光滑嵌入）$f:U \to R^N$，使 $V \subset U$，而且对任何 $x \in V$，$g(x) = f(x)$，我们说 g 是一个**光滑映射**（或**光滑嵌入**）.

最后我们给几个有用的光滑映射

(14.1) 令 λ：$R \to R$ 的定义为

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & 若\ x \leqq 0, \\ e^{-1/x} & 若\ x > 0, \end{cases}$$

则 λ 是一个光滑映射.

(14.2) 若 λ 是如上，而且 μ：$R \to R$ 的定义是

$$\mu(x) = \lambda(x)\lambda(1 - x),$$

则 μ 是一个光滑映射，而且

$$\mu(x) = 0 \quad 若\ x \leqq 0\ 或\ x \geqq 1,$$

$$\mu(x) > 0 \quad 若\ 0 < x < 1.$$

(14.3) 若 μ 是如上，而且 ν：$R \to R$ 的定义是

$$\nu(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \mu(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t)dt},$$

则 ν 是一个光滑映射，

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & 若\ x \leqq 0, \\ 1 & 若\ x \geqq 1, \end{cases}$$

而且

$$\nu'(x) > 0 \qquad 若\ 0 < x < 1.$$

学会计算导函数及定积分的读者应当能够证明(14.1)，(14.2)和(14.3)，而且也能够作 λ，μ 和 ν 的图. 所以在这里我们不再多说了.

§ 15　光滑流形、光滑同胚

这一节是微分拓扑的基础.

已给一个在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的 n 维流形 M. 我们知道对任何 $x\in M$，存在一个 x 在 M 中的邻域 U 及一个拓扑嵌入

$$\xi:\ U \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$$

使满足下面的条件. 若 $x\in\partial M$，则 $\xi(x)\in\partial H^n$, $\xi(U)\subset H^n$ 而且 $\xi(U)$ 是 H^n 中的一个开集. 若 $x\notin\partial M$, 则 $\xi(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集.

若 $\xi^{-1}:\ \xi(U)\to\boldsymbol{R}^N$ 是一个光滑嵌入，我们说 M 在点 x 的附近是**光滑的**. 如果 M 在其中每一点附近都是光滑的，我们说 M 是 $\boldsymbol{R}^N$ 中一个 **n 维光滑流形**.

(15.1) 例子.

(1) (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的 1 维光滑流形.

(2) $\boldsymbol{R}^n$, H^n, B^n, D^n 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 n 维光滑流形.

(3) S^n 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的一个 n 维光滑流形.

(4)若 M 是 $\boldsymbol{R}^N$ 中的一个 n 维光滑流形，而且 M' 是 M 中一个不等于$\varnothing$的开集，则 M' 亦是 $\boldsymbol{R}^N$ 中的一个 n 维光滑流形.

(5)若 M 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中一条简单闭曲线，由一个多角形的边所构成，则 M 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个 1 维流形，但不是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个 1 维光滑流形. 原因是 M 在每一顶点有一个隅角，于是在它的附近不是光滑的.

已给一个在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的 n 维光滑流形. 若 U 是 M 中的一个开集，$\xi:\ U\to\boldsymbol{R}^n$ 是一个拓扑嵌入，使 $\xi(U)$ 是 H^n 或 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个

开集，而且 ξ^{-1}：$\xi(U)\to \boldsymbol{R}^N$ 是一个光滑嵌入，我们称

$$(U,\ \xi)$$

为光滑流形 M 中一个**坐标邻域**．在坐标邻域 (U,ξ) 中，任何一点 $x\in U$ 的坐标是

$$\xi(x)=(x_1,\cdots,x_n).$$

光滑流形 M 上的**光滑结构**是光滑流形 M 中所有坐标邻域所构成的集．

已给一个在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的 n 维光滑流形 M，一个在 $\boldsymbol{R}^{N'}$ 中的 n' 维光滑流形 M' 及一个映射

$$f:\ M\longrightarrow M'.$$

若对任何 $x\in M$，存在一个 M 中坐标邻域 (U,ξ) 及一个 M' 中坐标邻域 $(U',\ \xi')$，使

$$x\in U,f(x)\in U',$$

而且

$$\xi' f\xi^{-1}:\xi(U\cap f^{-1}(U'))\longrightarrow \boldsymbol{R}^{N'}$$

是一个光滑映射（或光滑嵌入），我们说 f：$M\to M'$ 是一个**光滑映射**（或**光滑浸人**）．若 f：$M\to M'$ 是一个光滑浸入，而且是一对一的，我们说 f：$M\to M'$ 是一个**光滑嵌入**．若 f：$M\to M'$ 是一个光滑嵌入，而且是满的，我们说 f：$M\to M'$ 是一个**光滑同胚**．对任何两个光滑流形 M 和 M'，若存在一个光滑同胚 f：$M\to M'$，我们说 M 与 M' 是**光滑同胚的**．

（15.2）f：$M\to M'$ 是一个光滑同胚的一个充要条件是 f 是一个同胚而且 f 与 f^{-1} 是光滑的．

微分拓扑是研讨光滑流形在光滑同胚下不变的性质．这种性质若一个光滑流形 M 具有，则任何一个与 M 光滑同胚的光滑流形 M' 都具有．

已给两个光滑流形 M 与 M' 及两个光滑嵌入 f_0，f_1：$M\to$

M'. 若

$$F: M \times [0,1] \longrightarrow M'$$

是一个光滑映射，使对任何 $t \in [0, 1]$，$f_t(x) = F(x,t)$ 定义了一个光滑嵌入

$$f_t: M \longrightarrow M',$$

我们说 F 是 f_0 与 f_1 之间的一个**光滑同痕**. 如果在 f_0 与 f_1 之间存在一个光滑同痕，我们说 f_0 与 f_1 是**光滑同痕的**.

§16 光滑化问题

我们先考虑 R^2 上的简单闭曲线，很明显地，S^1 是光滑的，但是由一个多角形的边所构成的简单闭曲线却不是光滑的. 原因是在每一个顶点有一个隅角.

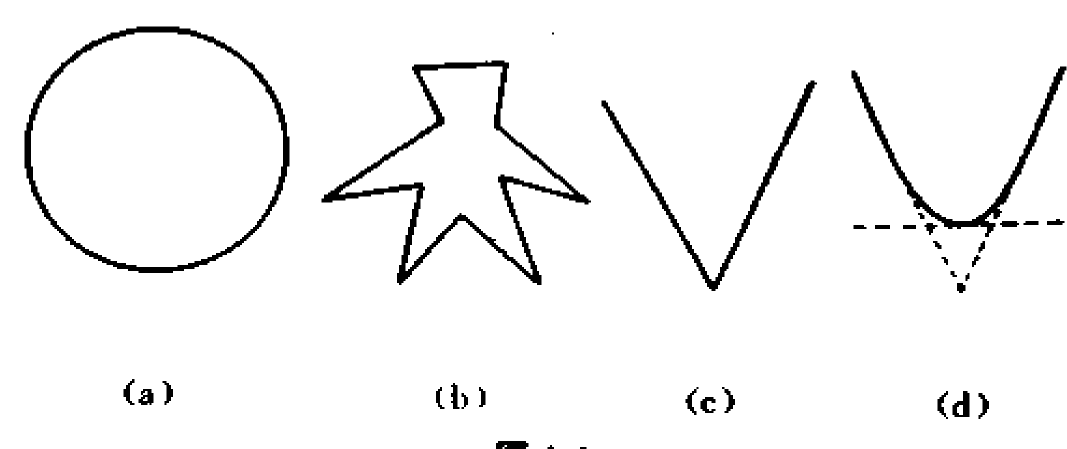


图 4.1

为去掉这些隅角，我们先考虑拓扑嵌入

$$f: R \longrightarrow R^2.$$

它的定义是

$$f(x) = (x, r|x|),$$

其中 r 是一个已给的正实数. 于是 f 的图在原点有一个隅角. 去这个隅角可以用下面的方法，令 $\nu: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 为（14.3）中所给的光滑映射. 则对任何 $\delta>0$，有一个光滑映射

$$\alpha: \boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R},$$

它的定义是

$$\alpha(x)=\nu(|x|/\delta-1).$$

于是有一个光滑嵌入

$$g: \boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}^2,$$

它的定义是

$$g(x)=\alpha(x)f(x)+(1-\alpha(x))(x,r\delta).$$

在 $|x|\geqq 2\delta$ 时，g 的图就是 f 的图. 但在 $|x|\leqq 2\delta$ 时，g 的图是一光滑曲线段，同时当 δ 接近 0 时，g 的图接近于 f 的图，所以 f 的图在原点的隅角被光滑化了.

对任何一个多角形的边所构成的简单闭曲线，我们可以用这方法去光滑化每一顶点的隅角使得到一条光滑的简单闭曲线，接近原来的简单闭曲线，对一个三角形的边所构成的简单闭曲线和光滑化后的简单闭曲线，可以用图 4.2 示意.

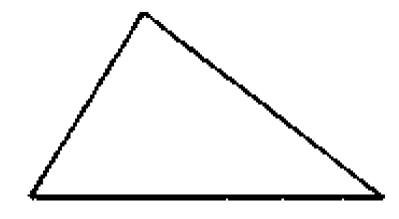




图 4.2

其次让我们来看曲面，在 $\boldsymbol{R}^2$ 中，S^3 是光滑的，但是由一个四面体上 4 个三角形所构成的曲面 M 不是光滑的. 原因是在四面体 6 条边上每一点 M 不光滑.

对这个曲面 M，我们可以用类似的方法将它光滑化，如图

4.3 所示．我们有两个三角形 ABC 和 ABD，相交于公共边$\overline{AB}$. 在这两个三角形内部各取一点，即图中的点 P 和 Q，对$\overline{AB}$上任何异于 A 及 B 的一点 R，$\overline{PR}\cup\overline{RQ}$是一折线，在点 R 有一隅角．于是我们可以用上面的方法使光滑化．对每一点 R 我们需用一个正实数 $\delta(R)$．只要 $\delta(R)$ 是 R 的光滑函数，我们就能够将$\overline{AB}-\{A,B\}$ 光滑化．

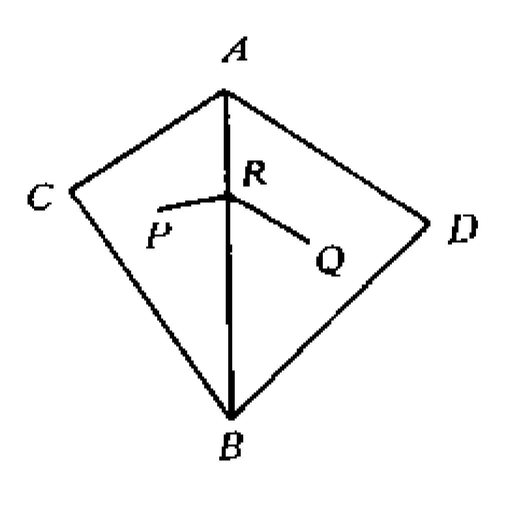
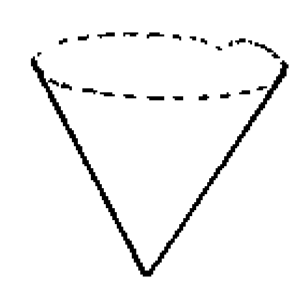


图 4.3

对 M 的每一条边做这样的光滑化，我们得到一个新的曲面 M'，它的上面除开四个点（即原来 M 的顶点）外，都是光滑的．

M' 在每一个不光滑的点的附近呈锥形．于是可以用类似方法去光滑化．图 4.4 是光滑化前后的示意图．



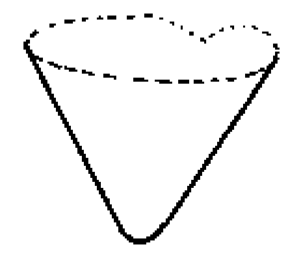


图 4.4

在第 12 节中，我们已经见到 S^2 与 T^2 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的光滑曲面，KB 是 $\boldsymbol{R}^4$ 中一个光滑曲面．但是所作的 $\boldsymbol{R}P^2$ 不是光滑的，原因是沿着 $\partial M_1=M_1\cap M_2=\partial M_2$ 并不光滑．

要光滑化所作的 $\boldsymbol{R}P^2$ 并不困难，现在说明如下，先作一个拓扑嵌入

$$f:S^1\times[-1,1]\longrightarrow \boldsymbol{R}P^2,$$

使

$$f(S^1 \times \{0\}) = M_1 \cap M_2, f(S^1 \times [-1,0]) \subset M_1,$$
$$f(S^1 \times [0,1]) \subset M_2,$$

而且

$$f: S^1 \times [-1,0] \longrightarrow M_1,\ f: S^1 \times [0,1] \longrightarrow M_2$$

是光滑嵌入，于是对任何 $x \in S^1$，$f(\{x\} \times [-1,1])$ 是一曲线段，一般来说，这曲线段在点 $f(x,0)$ 有一个隅角，在其它点是光滑的. 所以我们可以仿照上面的方法将它光滑化.

在这里我们再说一个比较容看的例子. 若

$$M_1 = \{x \in S^2 | x_3 \geqq 0\},$$
$$M_2 = \{x \in \boldsymbol{R}^3 | \|x\| \leqq 1, x_3 = 0\},$$

则 $\partial M_1 = M_1 \cap M_2 = \partial M_2$，而且 $M = M_1 \cup M_2$ 是一个曲面，沿着 $M_1 \cap M_2$ 不是光滑的，但在其它点是光滑的，于是我们可以用上面的方法将它光滑化. 光滑化前后的示意图如下：

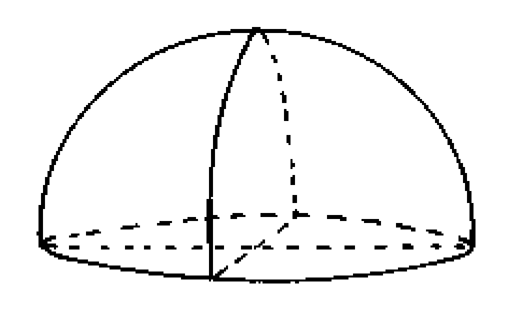
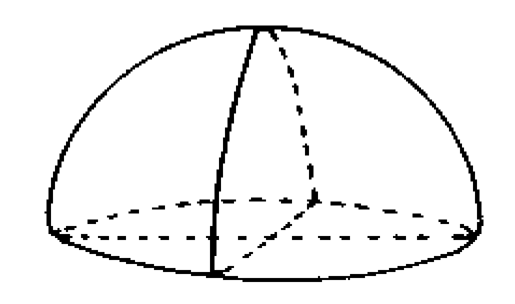



图 4.5

现在再谈谈紧的无边缘的可剖分的连通流形的光滑化问题. 已给一个在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的有限复形 K，使多面体 $|K|$ 是一个紧的无边缘的 n 维连通流形 M，令 A 为 K 中所有维数小于 n 的单形的并集. 则 M 在 A 中的点一般是不光滑的，但在其他的点是光滑的，对这样一个 n 维流形 M，我们能够将它光滑化吗？

若 $n>2$，我们没有方法将这种流形一个一个作出来. 所以

不能像处理曲面一样来研讨一般性的光滑化问题. 同时我们没有什么图形可依赖了. 在这情形之下，任何“直觉”只是猜测，对错只在一线间，决不可以轻易肯定或否定，所以唯一的方法，是去发展高深的数学理论，然后凭理论求问题的答案.

解答一般性光滑化问题得用很多代数拓扑，包括上同调论和同伦论. 先用代数拓扑发展一套理论，使 M 的光滑化问题演化成 M 在代数拓扑中的问题，因之可以找到一个紧的，无边缘的，可剖分的连通 8 维流形 M，使我们无法将它光滑化，作这样一个 M 并不太难，但证明太高深了.

§17 光滑流形的粘合及连接和

在第 11 及第 12 两节中，我们介绍了拓扑流形的粘合及连接和，使得到新的拓扑流形，在这一节中我们将粘合及连接和用在光滑流形上，使得到新的光滑流形.

一个最简单的粘合的例子是由一条线段得到一个圆. 如在第 11 节中说过，令

$$M = \{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid |x_1| \leqq \pi,\ x_2 = 0\}$$

而且令

$$F:\ M \times [0,\ 1] \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$$

的定义为

$$F((x_1,0),t) = \begin{cases} (x_1,0), & t = 0, \\ \left(\dfrac{1}{t}\sin t x_1, \dfrac{1}{t}(1-\cos t x_1)\right), & t > 0. \end{cases}$$

对任何 $t \in [0,1]$，令

$$f_t:\ M \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$$

的定义为$f_t(x)=F(x,t)$. 则对任何$t\in[0,1)$, f_t是一个光滑嵌入，而且当t从0增至1时，$f_t(M)$在R^3中光滑变形，而且最后所得到的$f_1(M)$是一个光滑流形.

利用同样的方法，我们可由R^3中一个矩形M得到一个圆柱侧面或一个麦比乌斯带. 与在第12节中所见到的大同小异. 唯一的不同是在这里须强调光滑.

其次我们考虑两个光滑流形的连接和. 已给两个紧的无边缘的连通光滑n维流形M_1与M_2及两个光滑嵌入

$$f_1:\ D^n\longrightarrow M_1,\ f_2:\ D^n\longrightarrow M_2,$$

则

$$M_1'=M_1-f_1(D^n-\partial D^n),\ M_2'=M_2-f_2(D^n-\partial D^n)$$

是两个紧的有边缘的连通光滑n维流形，而且可以用光滑同胚

$$\lambda=f_2f_1^{-1}:f_1(\partial D^n)\longrightarrow f_2(\partial D^n)$$

将它们粘合在一起，使得到连接和

$$M_1\# M_2.$$

一般来说，$M_1\# M_2$在粘合地方$\lambda f_1(\partial D^n)=f_2(\partial D^n)$不一定是光滑的，但是在其他部分则是光滑的. 利用上一节的光滑化，我们不难将$M_1\# M_2$造成一个光滑流形. 现在让我们说明如下.

首先我们观察示意图4.6.

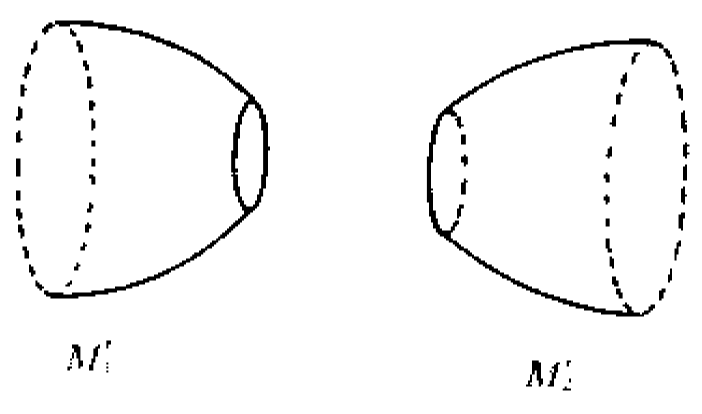


图 4.6

利用光滑同痕，我们能够将 M_1' 与 M_2' 光滑变形，使变形后的 M_1' 与 M_2' 的边缘的附近呈圆柱形，示意图 4.7.

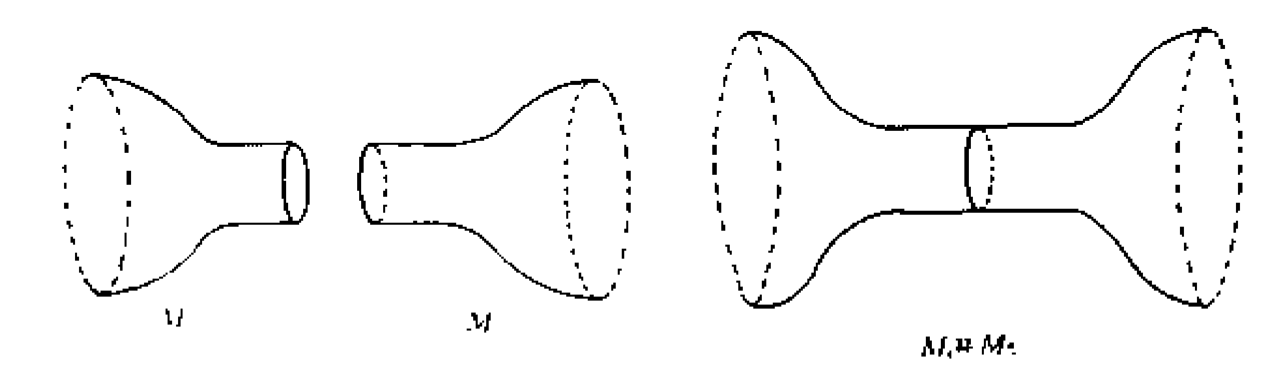


图 4.7　　　　图 4.8

最后将变形后的 M_1' 与 M_2' 沿着它们的边缘粘合在一起，使得到一个紧的无边缘的连通光滑 n 维流形 $M_1 \# M_2$. $M_1 \# M_2$ 在粘合地方的附近是呈圆柱形（图 4.8）.

在这里我们再说几句已经在第 12 节中说过的话，$M_1 \# M_2$ 不但可能随 M_1 与 M_2 的改变而改变，而且也可能随 f_1 与 f_2 的改变而改变. 不过当 M_1 与 M_2 是曲面时，$M_1 \# M_2$ 在光滑同胚之下，由 M_1 与 M_2 完全决定，与 f_1 和 f_2 的选择无关. 因此在 $\boldsymbol{R}^3$ 中有光滑曲面 rT^2，在 $\boldsymbol{R}^4$ 有光滑曲面 $r\boldsymbol{RP}^2$.

光滑曲面 rT^2 与 $r\boldsymbol{RP}^2$ 也可以用另一方法得到的. 在 (12.1) 中我们说过每一个曲面是可剖分的. 所以对任何一个曲面 M，存在一个有限复形 K，使多面体 $|K|$ 同胚于 M，于是可以用上一节的方法，先光滑化 K 中每一个 1 维单形中异于端点的点，然后再光滑化 K 的顶点. 这经光滑化后所得到的光滑曲面可以看作光滑的 M.

在第 20 节中我们还要谈 7 维怪球面的连接和，出现的成果是很难用直觉去想象的.

§ 18 光滑与不光滑之间的差距

光滑与不光滑之间的差距，说小可能很小，说大也可能很大. 比如说对简单闭曲线和曲面，光滑与否并不影响成果. 可是对 3 维流形就不同了. 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中亚力山大有角球面 $\boldsymbol{M}$ 所引起的意外现象（见第 9 节）的主要原因是 M 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中不是光滑的. 古语说："差之毫厘，失之千里." 做现代数学的困难在此，做现代数学的兴趣亦在此. 许多主要数学问题的决定只是一线之差. 点滴无误是对的，毫厘之差就可能错了. 有志于做数学的读者，对这一点必须认真.

现在让我们谈谈一些差距.

I. 在（5.5）中，我们说存在一个满的映射 $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^n$. 我们不难体会到，那样作出的 f 不是光滑的. 事实上这个体会不错. 原因是下面的成果：

（18.1） Sard **定理**. 已给一个光滑 n 维流形 M，一个光滑 n' 维流形 M' 及一个光滑映射

$$f: M \longrightarrow M'$$

若 $n<n'$，则 f 不是满的.

II. 在第 10 节中我们提到可剖分问题，问是否任何一个紧的无边缘的连通 n 维流形都是可剖分的. 我们说问题的答案是否定的，原因是存在一个不可剖分的紧的无边缘的连通 6 维流形，为找这个流形，我们得用代数拓扑. 首先我们须发展一套高深理论，使一个紧的无边缘的连通 n 维流形 M 的可剖分问题，化成为一个 M 的 4 维上同调类 $e^4(M)$ 是否等于 0 的问题，依靠这个成果，我们才能作出一个不可剖分的 6 维流形.

若有光滑条件，情况就不同了．原因是有下面的成果．

(18.2) Cairns **定理**．任何一个紧的光滑 n 维流形是可剖分的。

IV．若 M 是一个在 R^3 中的亚力山大有角球面，则不存在一个同胚 $f: R^3 \to R^3$，使 $f(M) = S^2$．

另方面，我们却有下面的结果：

(18.3) 若 M 是一个在 R^n 中的光滑流形，同胚于 S^{n-1}，则存在一个光滑同胚 $f: R^n \to R^n$，使 $f(M) = S^{n-1}$

§19 庞加莱猜测

在(12.7)中我们将曲面分类，就是说在同胚之下，我们能够将曲面个别作出来，所以一个很自然的问题是在 $n>2$ 时，我们应如何将紧的无边缘的连通 n 维流形分类。针对这分类问题，一个首先的问题是：

庞加莱猜测 若 M 是一个紧的无边缘的连通 3 维流形，和 S^3 有相同的同伦型，则 M 与 S^3 同胚。

许多数学家曾经尝试去证明庞加莱猜测。不只一次好像已经成功了或者差不多成功了，可是并没有真正成功。出于许多数学家意料之外，在 1961 年，Smale 证明了高维的庞加莱猜测。他的结果是：

(19.1) 若 M 是一个紧的无边缘的连通 n 维光滑流形，和 S^n 有相同的同伦型，则在 $n \geq 5$ 时 M 与 S^n 同胚。

(19.1)是三十余年来在微分拓扑上著名成果之一。它的证明既冗长又繁杂，不是一般读者们所能了解的。所以我们只能给一个简单的说明。

一个配边是一个三元组

$$(W;\ V_1,\ V_2),$$

其中 W 是一个紧的有边缘的连通 n 维光滑流形，而且

$$\partial W = V_1 \cup V_2, \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing.$$

一个 H 配边是一个配边 $(W;\ V_1,\ V_2)$，满足下面两个条件：

(i) W 是单连通的。就是说对任何一个映射 $\varphi : S^1 \to W$，存在一个映射 $\Phi : S^1 \times [0,1] \to W$，使对任何 $x \in S^1$，$\Phi(x,0) = \varphi(x)$，而且 $\Phi(S^1 \times \{1\})$ 是一个点。

(ii) 恒等嵌入

$$i_1 : V_1 \to W, \qquad i_2 : V_2 \to W$$

是同伦等价（恒等嵌入将每一点映射到它自己）。

（由 (i) 与(ii)，我们能够证明 V_1 与 V_2 也是单连通的。）

(19.2) **H 配边定理** 若 $(W;\ V_1,\ V_2)$ 是一个 H 配边，而且 W 的维数≥ 6，则 W 与 $V_1 \times [0,\ 1]$ 光滑同胚。

证明(19.1)的最大困难是去证明(19.2)。假设(19.2)已经得到证明，那么我们不难看到(19.1)在 $n>5$ 时成立。已给一个紧的无边缘的连通 n 维光滑流形 M，与 S^n 有相同的同伦型，$n>5$。先作两个光滑嵌入

$$f_1,\ f_2 : D^n \longrightarrow M,$$

使 $f_1(D^n) \cap f_2(D^n) = \varnothing$。令

$$W = M - [f_1(D^n - \partial D^n) \cup f_2(D^n - \partial D^n)],$$

$$V_i = f_i(\partial D^n), i = 1,2.$$

则 $(W;\ V_1,\ V_2)$ 是一个 H 配边，而且 W 的维数是≥ 6。于是由 (19.1) 知道 W 与 $\partial D^n \times [0,\ 1]$ 光滑同胚。因此我们容易作一个同胚

$$g : M \to \partial(D^n \times [0,1])$$

使 $\quad g f_i(D^n) = D^n \times \{i-1\}, i = 1,2,$

$$g(W) = \partial D^n \times [0,1]。$$

若 $n=5$，我们先得证明存在一个紧的单连通的连通 6 维光滑流形 W'，使 $\partial W'=M$（这个证明相当困难）。作一光滑嵌入

$$f: D^n \longrightarrow W' - \partial M'。$$

令

$$W = W' - f(D^n - \partial D^n),$$

$$V_1 = f(\partial D^n), V_2 = \partial W' = M。$$

则（$W; V_1, V_2$）是一个 H 配边，而且 W 的维数是 6。所以由（19.1）知道 M 与 S^5 光滑同胚。

为得到（19.2），Smale 先用莫尔斯理论去证明，在光滑同胚之下，W 可以由 $V_1\times[0, 1]$ 陆续粘上有限个"环柄"得到的。其次用 $n\geqq6$ 的假设证明这有限个环柄的次序可以互相交换；正如将有限个整数相加时，这些整数的次序可以互相交换。再其次证明对每一环柄 H，可找到一个环柄 H'，使由 $V_1\times[0,1]$ 陆续粘上 H 与 H' 时，所得到的光滑流形与 $V_1\times[0,1]$ 光滑同胚；正如由整数 a 陆续加上整数 b 与 $-b$，所得到的等于 a。利用这方法，我们能将环柄的个数减到 0。所以 W 与 $V_1\times[0,1]$ 光滑同胚。

在（19.2）中之所以假设 $n\geqq6$ 是使 W 有足够大的"空间"，使环柄的次序可以互相交换。所以（19.2）在 $n=4$ 或 5 时是否成立，是数学科研中一个热门的问题。

（19.3）　定理（19.1）在 $n=4$ 时成立。

这成果是 Freedman 在 1982 年得到的。Freedman 并没有证明（19.2）在 n=5 时成立，可是他证明了一个比较弱的结果，而且那结果足够让他得到了（19.3)。因为这工作，Freedman 得到了菲尔兹奖（相当于诺贝尔奖）。

利用（19.2），我们还可以得到

(19.4)　若 M 是一个紧的 n 维光滑流形，与 D^n 有相同的同伦型，而且 ∂M 是单连通的，则在 $n\geq 6$ 时，M 与 D^n 光滑同胚。

§20　7维怪球面

若 Σ^n 是一个 n 维光滑流形，同胚于 S^n。我们问 Σ^n 是否光滑同胚于 S^n。

四十年前很多数学家相信这问题的答案是肯定的，可是谁也不能够给一个证明。出于大家意料之外，在 1956 年，Milnor 作出 7 维怪球面，那是 7 维光滑流形，同胚于 S^7 但不光滑同胚于 S^7。微分拓扑在近三四十年来之所以成为数学科研的热门，受这成果的影响是一个主要的因素。

作 7 维怪球面并不困难，现在特地介绍 Milmor 的作法如下：

读者们一定知道复数。任何一个复数可以写成

$$a+bi,\qquad a,\ b\in \boldsymbol{R}.$$

若 $a+bi$ 与 $a'+b'i$ 是两个复数，则

$$a+bi=a'+b'i\Longleftrightarrow a=a',b=b';$$

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i;$$

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i;$$

关于复数的乘法，我们只要记着分配律成立，而且

$$i^2=-1.$$

我们常常把复数 $a+bi$ 看作 $\boldsymbol{R}^2$ 上的点 $(a,\ b)$。于是所有复数所构成的集 $\mathbf{C}$ 就是 $\boldsymbol{R}^2$。再者，任何一个复数 $a+bi$ 的绝对值是

$$|a+bi|=\|(a,b)\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \sqrt{(a+bi)(a-bi)}.$$

类似地，在近世代数中有**四元数**。任何一个四元数可以写成

$$a+bi+cj+dk, \qquad a,b,c,d \in \mathbf{R}.$$

若 $a+bi+cj+dk$ 与 $a'+b'i+c'j+d'k$ 是四元数，则

$$a+bi+cj+dk = a'+b'i+c'j+d'k$$

$$\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c',\ d=d';$$

$$(a+bi+cj+dk)+(a'+b'i+c'j+d'k)$$

$$=(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k,$$

$$(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)$$

$$=(aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-dc')i$$

$$+(ac'-bd'+ca'+db')j+(ad'+bc'-cb'$$

$$+da')k.$$

关于四元数的乘法，我们只要记着分配律成立，而且

$$i^2=j^2=k^2=-1;$$

$$jk=-kj=i,\ ki=-ik=j,\ ij=-ji=k.$$

我们常常把四元数 $a+bi+cj+dk$ 看作 $\mathbf{R}^4$ 中的点（a，b，c，d）。于是所有四元数所构成的集 $\mathbf{H}$ 就是 $\mathbf{R}^4$，再者，任何一个四元数 $a+bi+cj+dk$ 的绝对值是

$$|a+bi+cj+dk| = \|(a,b,c,d)\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$= \sqrt{(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk)}.$$

因为 D^4 和 S^3 是 $\mathbf{H}=\mathbf{R}^4$ 的子集，所以对任何整数 h，我们有一个光滑同胚

$$\lambda_h: S^3\times S^3 \longrightarrow S^3\times S^3,$$

它的定义是

$$\lambda_h(u,v) = (u^{-1}, u^h v u^{1-h})$$

令

$$\Sigma_h = (D^4 \times S^3) \bigcup_{\lambda_h} (D^4 \times S^3).$$

就是说有两个不同的 $D^4 \times S^3$，我们将第一个 $D^4 \times S^3$ 的边缘上的点 (u, v) 与第二个 $D^4 \times S^3$ 的边缘上的点 $\lambda_h(u, v)$ 相粘合，所得到的 7 维光滑流形是 Σ_h。

利用代数拓扑，我们能够证明 Σ_h 与 S^7 有相同的同伦型。于是由（19.1）知道 Σ_h 与 S^7 同胚。

再利用代数拓扑，我们能够证明 Σ_h 与 S^7 光滑同胚的一个充要条件是 $h(h-1)$ 是 56 的倍数。所以 Σ_2、Σ_3 等等都是 7 维怪球面，不光滑同胚于 S^7.

从发现了 7 维怪球面以后，对怪球面的科研接踵而来。为决定所有怪球面，科研的成果牵涉到古典分析中的伯努利数，牵涉到代数几何，还发展了和群论有密切关系的换球术理论。由这里我们可以见到，做一位现代数学工作者，不但须了解一个领域中的先进科研，还得有多领域的知识。不像四五十年前，大多数的数学工作者将自已限制在一个领域内，也能够得到良好的科研成果。

7 维怪球面也可以用下面方法得到，一个 5 维复线性空间 $\boldsymbol{C}^5$ 中一个点可以写成

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5), \qquad z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \in \boldsymbol{C}.$$

令

$$z_\alpha = x_\alpha + y_\alpha i, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5$$

其中 $x_\alpha, y_\alpha \in \boldsymbol{R}$. 如果将 $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ 看作 $\boldsymbol{R}^{10}$ 中的点

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5),$$

则

$$\boldsymbol{C}^5 = \boldsymbol{R}^{10},$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in S^9$$

$$\Longleftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1.$$

对任何 $r\in \mathbf{Z}$，令

$$\boldsymbol{K}_r=\{(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)\in S^9 \mid z_1^{6r-1}+z_2^3+z_3^2+z_4^2+z_5^2=0\}.$$

则下面的结果成立。

(20.1) 对任何 $r\in \mathbf{Z}$，K_r 是一个 7 维光滑流形，同胚于 S^7。反过来，若 Σ 是一个 7 维光滑流形，同胚于 S^7，则存在一个 $r\in \mathbf{Z}$，使 Σ 光滑同胚于 K_r。

(20.2) 对任何 r，$r'\in \mathbf{Z}$，K_r 与 $K_{r'}$ 光滑同胚的一个充要条件是 $r+r'$ 和 $r-r'$ 两整数中至少有一个是 28 的倍数。再者，对任何 $r\in \mathbf{Z}$，K_r 与 S^7 光滑同胚的一个充要条件是 r 是 28 的倍数。

已给一个 7 维光滑流形 Σ，同胚于 S^7。若 $f: D^7\to\Sigma$ 是一个光滑嵌入，由 (19.4) 我们知道存在一个光滑同胚 $g: D^7 \to \Sigma - f(D^7 - \partial D^7)$，所以 Σ 是由粘合两个 7 维闭球体 $f(D^7)$ 和 $g(D^7)$ 所得到的。反过来，若 M_1 和 M_2 是两个 7 维光滑流形，光滑同胚于 D^7，而且 $\lambda: \partial M_1\to\partial M_2$ 是一个光滑同胚，我们能够用 λ 将 M_1 和 M_2 粘合在一起，使得到一个 7 维光滑流形

$$\sum = M_1 \cup_\lambda M_2$$

(参阅第 17 节)，同胚于 S^7。

为讨论这种 7 维流形的连接和，我们先得介绍流形的定向问题。已给一个连通的 n 维光滑流形 M 及一个光滑嵌入

$$f: D^n \longrightarrow M .$$

令光滑同胚

$$\tau: D^n \longrightarrow D^n$$

的定义为

$$\tau(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n) = (x_1,\cdots,x_{n-1}, - x_n).$$

若光滑嵌入 f，$f\tau: D^n\to M$ 是光滑同痕的，我们说 M 是不可定

向的。若光滑嵌入 f，$f\tau: D^n \to M$ 不是光滑同痕的，我们说 M **是可定向的。**

(20.3) 已给一个连通的 n 维光滑流形 M 及一个光滑嵌入。$f: D^n \to M$. 若 M 是不可定向的，则任何一个光滑嵌入 $f': D^n \to M$ 与 f 光滑同痕。若 M 是可定向的，则任何一个光滑嵌入 $f': D^n \to M$ 只与 f 及 τf 之中的一个光滑同痕。

一个**定向的**连通的 n 维光滑流形包含一个可定向的连通的 n 维光滑流形 M 及与一个光滑嵌入 $f: D^n \to M$ 光滑同痕的所有光滑嵌入。我们将它简单记作

$$(M, f),$$

而且说它的定向由 f（或与 f 光滑同痕的任何光滑嵌入）来表示。

已给两个定向的无边缘的连通的 n 维光滑流形 (M_1, f_1) 与 (M_2, f_2)。令

$$\lambda = f_2 \tau f_1^{-1}: f_1(\partial D^n) \to f_2(\partial D^n).$$

我们可以得到一个定向的无边缘的连通的 n 维光滑流形

$$(M, f),$$

其中

$$M = (M_1 - f_1(D^n - \partial D^n)) \cup_\lambda (M_2 - f_2(D^n - \partial D^n)),$$

$f: D^n \to M$ 可以是与 f_i 光滑同痕的光滑嵌入 $f: D^n \to M_i$，满足 $f(D^n) \subset M_i - f_i(D^n - \partial D^n)$。我们说 (M, f) 是 (M_1, f_1) 与 (M_2, f_2) 的**连接和。**

现在回头观察上面所作的光滑流形 K_r，$r \in Z$。这些 K_r 是可定向的。为给每一个 K_r 一个“自然”的定向，我们作一个光滑嵌入

$$f_r: D^7 \longrightarrow K_r$$

如下：

令

$$M_r = \{(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) \in C^5 \mid \text{只少有一个 } z_\alpha \text{ 不等于 } 0, \text{而且 } z_1^{6r-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0\},$$

$$D^8 = \{(z_1,z_2,z_3,z_4) \in C^4 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1\},$$

则存在一个很小的 $\delta>0$，使

$$f'_r(z_1,z_2,z_3,z_4) = (\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3, 1+\delta z_4, z_5'),$$

$$f'_r(0,0,0,0) = (0,0,0,1,i)$$

决定了一个光滑嵌入

$$f'_r: D^8 \longrightarrow M_r.$$

令

$$D^7 = \{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in C^8 \mid z_4 \in R\} .$$

我们能够证明 $f'_r(D^8) \cap S^9$ 是 K^7 中一个光滑流形，与 D^7 光滑同胚。于是存在一个光滑映射

$$H: D^8 \times [0,1] \longrightarrow M_r$$

满足下面的条件。若对任何 $t \in [0,1]$，

$$h_t: D^8 \longrightarrow M_r$$

的定义是 $h_t(x) = H(x,t)$，则对任何 $t \in [0,1]$，h_t 是一个光滑嵌入，

$$h_t(0,0,0,i/2) = f'_r(0,0,0,i/2),$$

$h_0 = f'_r$，而且 $h_1(D^7) \subset K_r$。我们令

$$f_r = h_1: D^7 \longrightarrow K_r .$$

(20.3) (1) (K_r, f_r) 与 (K_{r+28}, f_{r+28}) 之间有一个保持定向光滑同胚，就是说有一个光滑同胚 $f: K_r \to K_{r+28}$，使 ff_r 与 f_{r+28}光滑同痕。

(2) (K_r, f_r) 与 (K_{-r}, f_{-r}) 之间有一个反定向光滑同胚，就是说有一个光滑同胚 $f: K_r \to K_{-r}$，使 ff_r 与 f_{-r}不光滑同痕。

(3) 在保持定向光滑同胚之下，(K_r, f_r) 与 $(K_{r'}, f_{r'})$ 的连接和是 $(K_{r+r'}, f_{r+r'})$。

(20.4) 在保持定向光滑同胚之下，

(K_r, f_r)，$r=0, 1, \cdots, 27$，

相互不同，而且形成近世代数中的加法群，其中的加法即连接和。

附录　直观集论

一个集是由一群个体所构成的。这些个体可以是数，可以是点，可以是直线，也可以是集。总而言之，它们是在数学中出现。如果 a 与 b 是两个个体，我们能够用直觉来决定，a 与 b 是**相同的**，或者是**不相同的**。用符号来表示，我们分别写成

$$a=b, \qquad a\neq b .$$

若 A 是一个集，而且 a 是 A 中的一个个体，我们说 a 是 A 中的一个**元素**，或 a **属于** A，或 a **包含在** A **中**（为一个元素），或 A **包含** a（为一个元素），用符号来表示，我们写成

$$a\in A .$$

若 a 不是 A 中的一个元素，我们写成

$$a\notin A .$$

如果 Z 是所有整数所构成的集，则

$$1\in Z, \qquad 1/2\notin Z .$$

我们有一个**空集**，记作

$$\varnothing$$

其中不包含任何元素。

如果一个集中的元素可以一一写下来，将所有元素写在括

号｛　｝之中，那就代表这个集。所以 $\{a\}$ 是一个集，其中只有一个元素 a；$\{a, b\}$ 是一个集，其中只有元素 a 与 b；同时

$$\{1, 2, 3, \cdots\}$$

是所有自然数所构成的集 N。

假设 P 是一个陈述，我们用

$$\{x|P\}$$

来表示一个集，其中的元素是所有满足 P 的个体。所以所有整数所构成的集 Z 是

$$\{x|x\text{ 是一个整数}\}.$$

若 A 是一个集，而且 P 是一个陈述，我们亦将

$$\{x|x\in A, P\}$$

简单写成

$$\{x\in A|P\}.$$

所以

$$N=\{x\in \mathbf{Z}|x>0\}.$$

已给两个陈述 P 与 Q。我们用

$$P\Longrightarrow Q$$

来表示"若 P 成立，则 Q 亦成立"，同时我们用

$$P\Longleftrightarrow Q$$

来表示

$$P\Longrightarrow Q, Q\Longrightarrow P.$$

换句话来说，$P\Leftrightarrow Q$ 表示 P 成立的一个**充要条件**是 Q 成立。所以

$$(P\Longleftrightarrow Q)\Longleftrightarrow(P\Longrightarrow Q, Q\Longrightarrow P).$$

已给两个集 A 与 B。若对任何 x，$x\in A\Rightarrow x\in B$，我们说 A 是 B 的**子集**，或 A **包含在** B **中**（为一个子集），或 B **包含** A（为一个子集）。用符号来表示，我们写成

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A。$$

若 $A\subset B$，而且 $B\subset A$，我们说 A 与 B **是相同的**，而且写成

$$A=B。$$

我们容易见到

（附 1）（1）对任何集 A，$\varnothing\subset A$。

（2）对任何集 A，$A\subset A$。

（3）若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$。

我们容易见到 $\{1, 2, 3\}$ 有 8 个子集，即

$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}$。

已给两个集 A 与 B。它们的**并集**，记作

$$A\cup B,$$

定义为

$$\{x \mid x\in A 或 x\in B\};$$

它们的**交集**，记作

$$A\cap B,$$

定义为

$$\{x \mid x\in A, x\in B\};$$

它们的**差集**，记作

$$A-B,$$

定义为

$$\{x \mid x\in A, x\notin B\}。$$

所以

$$\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\},$$

$$\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\},$$

$$\{1,2\}-\{2,3\}=\{1\}.$$

如果 A 是下面图中左边圆中的点所构成，B 是图 5.1 圆中的点所构成。

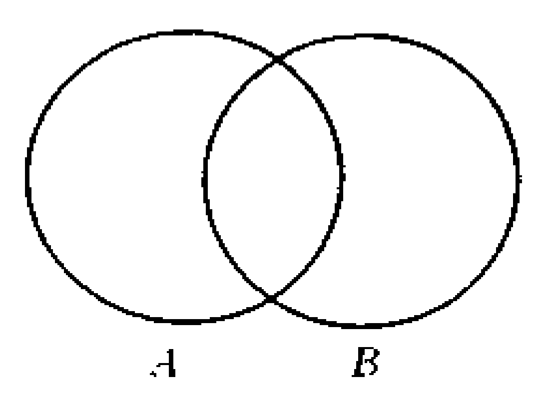


图 5.1

则 $A\cup B$，$A\cap B$ 与 $A-B$ 是图 5.2 中的阴影区。

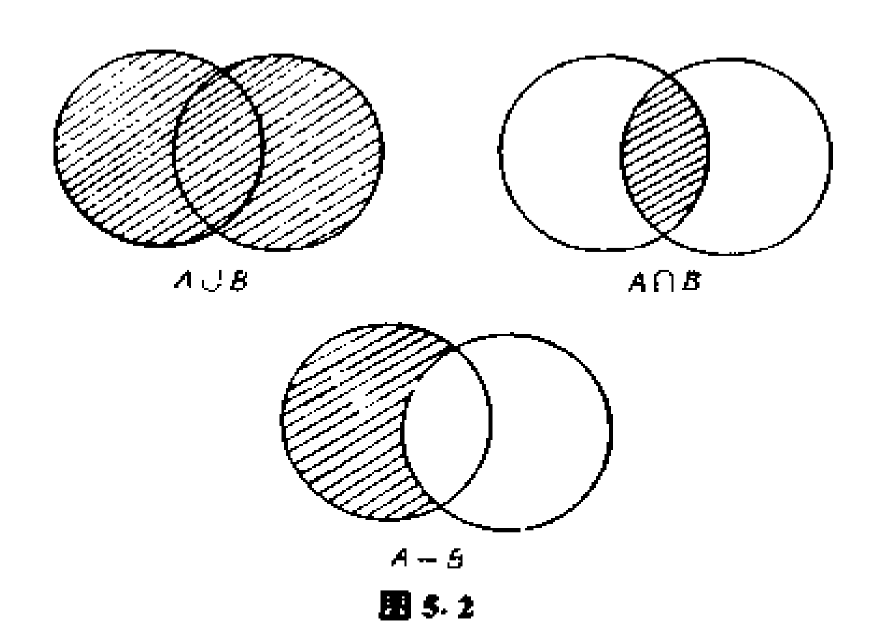


图 5.2

（附 2）（1）对任何集 A，$A\cup\varnothing=A$。

（2）对任何集 A 与 B，

$$A\cup B=B\cup A.$$

（3）对任何集 A，B 与 C，

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

这个集亦写成 $A\cup B\cup C$。

(4) 对任何集 A 与 B,

$$A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B.$$

(附 3) (1) 对任何集 A, $A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2) 对任何集 A 与 B,

$$A\cap B=B\cap A.$$

(3) 对任何集 A, B 与 C,

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

这个集亦写成 $A\cap B\cap C$.

(4) 对任何集 A 与 B,

$$A\subset B\Longleftrightarrow A\cap B=A .$$

(附 4) (1) 若 A 是 X 的子集, 则

$$X-(X-A)=A.$$

(2) 对任何集 A 与 B

$$A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A),$$

$$A-B=A-(A\cap B).$$

(3) 对任何一个集 X 的子集 A 与 B,

$$X-(A\cup B)=(X-A)\cap(X-B),$$

$$X-(A\cap B)=(X-A)\cup(X-B).$$

(4) 对任何集 A 与 B,

$$A\subset B\Longleftrightarrow A-B=\varnothing.$$

(附 5) 对任何集 A, B 与 C,

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

已给两个集 A 与 B, 对任何 $a\in A$ 及 $b\in B$, 我们说

$$(a,\ b)$$

是一个有序对, 就是说对任何 a, $a'\in A$ 及 b, $b'\in B$,

$$(a,b)=(a',b')\Longleftrightarrow a=a',\ b=b'.$$

比如说在平面解析几何中，每一点是一个有序对(a,b)，其中a与b是实数。我们令

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\},$$

而且称它为A与B的**积**。所以若$\boldsymbol{R}$是所有实数所构成的集，则

$$\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$$

是所有平面上的点所构成的集。

已给两个集X与Y。一个**由X到Y的函数**f，记作

$$f: x\longrightarrow Y,$$

是一个规则，使对任何$x\in X$，我们能够用那规则唯一决定一个$f(x)\in Y$。我们称$f(x)$为（在函数f下）x的**映象**。比如说我们有一个函数

$$f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R},$$

它的定义是$f(x)=x^2$.

对任何函数$f: X\longrightarrow Y$,

$$G(f)=\{(x,f(x))|x\in X\}$$

是$X\times Y$的一个子集，称为f的**图**。

（附 6）　对任何函数$f: X\rightarrow Y$，$G(f)$是$X\times Y$的一个子集，使对任何$x\in X$，唯一存在一个$y\in Y$，满足$(x,y)\in G(f)$。倒过来，若G是$X\times Y$的一个子集，使对任何$x\in X$，唯一存在一个$y\in Y$，满足$(x,y)\in G$，则唯一存在一个函数$f: X\rightarrow Y$，使$G(f)=G$。

已给一个函数$f: X\rightarrow Y$。对任何$A\subset X$，我们令

$$f(A)=\{f(x)|x\in A\},$$

称为（在函数f下）A的**映象**。对任何$B\subset Y$，我们令

$$f^{-1}(B)=\{x\in X|f(x)\in B\},$$

称为（在函数f下）B的 **逆映象**。

若对任何x，$x'\in X$，

$$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'),$$

我们称 f 为**一对一的**。若 $f(X) = Y$，我们称 f 为**满的**。若 f 是一对一的，也是满的，我们称 f 为一个**一一对应**。

（附 7） (1) 对任何一个集 X 及一个 X 的子集 A，我们有一个一对一的函数

$$i_A : A \longrightarrow X,$$

它的定义是 $i_A(x) = x$。我们称 i_A 为一个**包含函数**。

(2) 对任何一个集 X，包含函数

$$i_X : X \longrightarrow X$$

是一个一一对应。我们称 i_X 为一个**恒等函数**。

（附 8） (1) 一个函数 $f : X \to Y$ 是一对一的一个充要条件是对任何 $y \in Y$，$f^{-1}(\{y\})$ 中最多只有一个元素。

(2) 一个函数 $f : X \to Y$ 是满的的一个充要条件是对任何 $y \in Y$，$f^{-1}(\{y\})$ 中至少有一个元素。

(3) 一个函数 $f : X \to Y$ 是一个一一对应的一个充要条件是对任何 $y \in Y$，$f^{-1}(\{y\})$ 中恰好只有一个元素，于是对任何一个一一对应 $f : X \to Y$，我们有一个函数

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X,$$

使对任何 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 $f^{-1}(\{y\})$ 中的唯一元素。再者，f^{-1} 亦是一个一一对应，称为 f 的**逆函数**。

对任何两个函数

$$f : X \longrightarrow Y, \quad g : Y \longrightarrow Z,$$

我们有一个**合成函数**

$$gf : X \longrightarrow Z,$$

它的定义是

$$(gf)(x) = g(f(x)).$$

（附 9） 已给两个函数 $f : X \to Y$ 与 $g : Y \to Z$。

(1) 若 f 与 g 是一对一的，则 gf 亦是一对一的。

(2) 若 f 与 g 是满的，则 gf 亦是满的。

(3) 若 gf 是一对一的，则 f 是一对一的。

(4) 若 gf 是满的，则 g 是满的。

现在考虑一个集 X 中的一群子集。换一句话来说，我们考虑一个集 $\mathscr{A}$，其中每个元素 A 是 X 的一个子集，我们称

$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A=\{x\in X|$存在一个 $A\in\mathscr{A}$，使 $x\in A\}$

为 $\mathscr{A}$ 中的 A 的**并集**，称

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}}A=\{x\in X|\text{对任何 } A\in\mathscr{A},\ x\in A\}$$

为 $\mathscr{A}$ 中的 A 的**交集**。

假设 $\alpha: \Lambda\to\mathscr{A}$ 是一个满的函数，而且将 $\alpha(\lambda)$ 记作 A_λ，$\lambda\in\Lambda$，则

$$\mathscr{A}=\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}.$$

有时候我们

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A,\qquad \bigcap_{A\in\mathscr{A}}A$$

写成

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda,\qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda.$$

若 $\Lambda=\{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcup_{\lambda=1}^{n}A_\lambda=A_1\cup\cdots\cup A_n,$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap_{\lambda=1}^{n}A_\lambda=A_1\cap\cdots\cap A_n,$$

令

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\},$$

即所有自然数所构成的集，则

$$\bigcup_{\lambda\in N}A_\lambda=\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda=A_1\cup A_2\cup\cdots,$$

$$\bigcap_{\lambda\in N}A_\lambda=\bigcap_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda=A_1\cap A_2\cap\cdots,$$

已给一个集 A。若 $A=\varnothing$ 或者存在一个一一对应 $\alpha:\{1,2,\cdots,n\}\to A$，$n\in N$，我们说 A 是**有限的**，而且其中元素的个数是 0 或 n。若 A 不是有限的，我们说 A 是**无穷的**。所以 N 是无穷的。

若 A 是无穷的，而且存在一个一一对应 $\alpha: N\to A$，我们说 A 是**可数无穷的**。若 A 是有限的，或是可数无穷的，我们说 A 是**可数的**。若 A 不是可数的，我们说 A 是**不可数的**。很明显地，不可数的集是无穷的。

（附 10）N 是可数无穷的。

（附 11）Z 是可数无穷的。

N 中的元素可以依次排列成

$$1\longrightarrow 2\longrightarrow 3\longrightarrow 4\cdots,$$

另方面，Z 中的元素可以依次排列成

$$0\longrightarrow 1\longrightarrow -1\longrightarrow 2\longrightarrow -2\longrightarrow\cdots$$

所以存在一个一一对应 $\alpha: N\to Z$，使

$$\alpha(1)=0,\alpha(2)=1,\alpha(3)=-1,\cdots.$$

（附 12）(1) 一个有限集的任何子集是有限的。

(2) 一个可数集的任何子集是可数的。

为了解（附 12），读者们只要观察下面两个事实。一个是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任何子集是有限的；一个是 $\{1, 2, \cdots\}$ 的任何子集或是有限的，或是可数无穷的。

（附 13）两个可数无穷的集的积是可数无穷的。

我们只要知道 $N\times N$ 是可数无穷的就可以了。为证明这事实，我们将 $N\times N$ 中的元素依图 5.3 箭头指示的方向排列。

（附 14）所有有理数所构成的集 Q 是可数无穷的。

任何一个有理数可以唯一写成 p/q. 其中 $p\in Z$，$q\in N$，而且 p 与 q 没有一个公因子大于 1。如果将这样表示的有理数

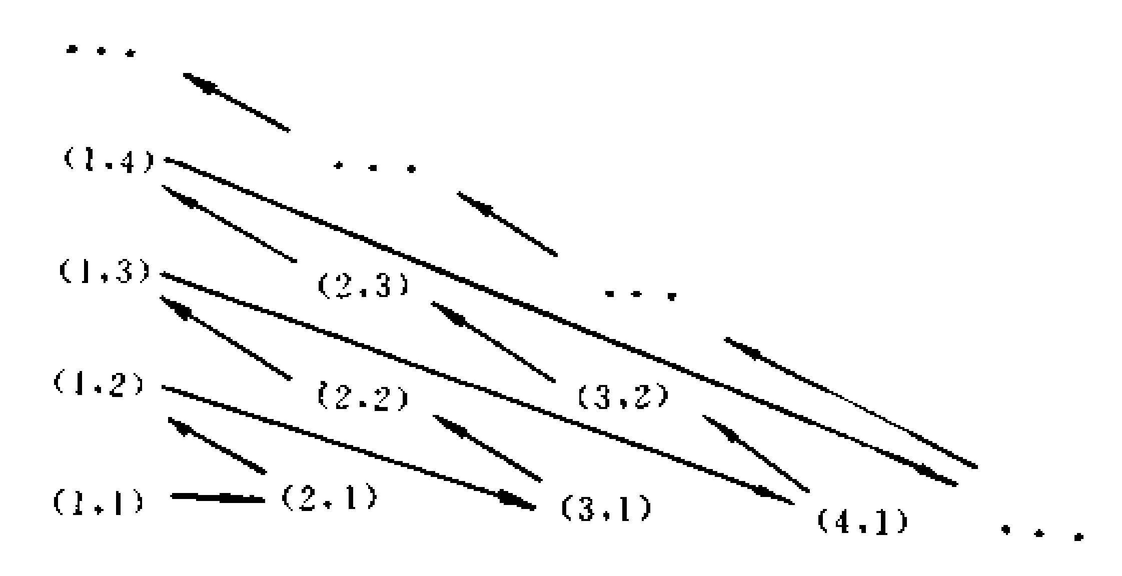


图 5.3

p/q 看作 $Z\times N$ 中的元素 (p, q)，那末 Q 是 $Z\times N$ 的一个子集。所以由（附 12）知道 Q 是可数的。另方面，Q 显然是无穷的。所以（附 14）成立。

（附 15）所有实数所构成的集 R 是不可数的。

这个事实不容易用直觉去体会，所以我们说明如下。由（附 12），我们知道只要证明 $[0, 1)$ 是不可数的就可以。在第 1 节中我们将 $[0, 1)$ 中每一个实数唯一写成小数

$$0.a_1a_2\cdots,$$

其中每一个 a_k 是不小于 0 而且不大于 9 的整数，同时不存在一个 $m\in N$，使 $a_m=a_{m+1}=\cdots=9$。如果 $[0, 1)$ 是可数的，则存在一个一一对应

$$f: N\to[0,1).$$

对任何 $R\in N$，令

$$f(k)=0.a_1^{(k)}a_2^{(k)}\cdots,$$

$$b_k=\begin{cases}a_k^{(k)}+1 & \text{若 } a_k^{(k)}\leqq 5,\\ a_k^{(k)}-1 & \text{若 } a_k^{(k)}>5.\end{cases}$$

则

$$b = 0.b_1b_2\cdots \in [0,1)$$

于是唯一存在一个 $l\in N$，使 $f(l) = b$ 。另方面，

$$a_l^{(l)} = b_l = a_l^{(l)} \pm 1 .$$

所以我们得到了一个矛盾。